

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANDRÉ LUIZ CORRÊA VIANNA FILHO

**UM ESTUDO DO MODELO DE ERICKSEN-LESLIE PARA
CRISTAIS LÍQUIDOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES,
APROXIMAÇÕES E ANÁLISE DE ERRO**

CURITIBA

2018

ANDRÉ LUIZ CORRÊA VIANNA FILHO

**UM ESTUDO DO MODELO DE ERICKSEN-LESLIE PARA
CRISTAIS LÍQUIDOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS
FINITOS: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES, APROXIMAÇÕES E
ANÁLISE DE ERRO**

Dissertação apresentada como requisito parcial à
obtenção do grau de Mestre em Matemática, no
Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de
Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Danizete Damázio.

CURITIBA

2018

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELO SISTEMA DE BIBLIOTECAS/UFPR
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

V617e

Vianna Filho, Andre Luiz Corrêa

Um estudo do modelo de Ericksen-Leslie para cristais líquidos via método dos elementos finitos: existência de soluções, aproximações e análise de erro / Andre Luiz Corrêa Vianna Filho. – Curitiba, 2018. 127 p. : il. color. ; 30 cm.

Dissertação - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2018.

Orientador: Pedro Danizete Damázio.

1. Equações de Ericksen-Leslie. 2. Cristais líquidos nemáticos. 3. Método dos elementos finitos.
I. Universidade Federal do Paraná. II. Damázio, Pedro Danizete. III. Título.

CDD: 518.25

Bibliotecária: Romilda Santos - CRB-9/1214



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **ANDRÉ LUIZ CORREA VIANNA FILHO** intitulada: **UM ESTUDO DO MODELO DE ERICKSEN-LESLIE PARA CRISTAIS LÍQUIDOS VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS: EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES, APROXIMAÇÕES E ANÁLISE DE ERRO**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 22 de Fevereiro de 2018.

PEDRO DANIZETE DAMAZIO

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)

FABIO ANTONIO BORINI

Avaliador Externo (UTFPR)

MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR

Avaliador Externo (UTA)

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Pedro Danizete Damázio que me orientou ao longo do mestrado e que, além de muito competente, sempre foi muito prestativo e atencioso.

Aos Professores do Departamento de Matemática da UFPR de um modo geral que sempre foram muito receptivos para conversar e tirar dúvidas.

Aos meus pais, André e Vania, e ao meu irmão, Andrey, pelo apoio que sempre tive dentro de casa.

Aos meus amigos e aos meus colegas de curso pelos momentos de descontração e pelo incentivo.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Considera-se uma versão penalizada do modelo de Ericksen-Leslie para o escoamento de cristais líquidos nemáticos. Estuda-se a existência de soluções para o modelo pelo método de Faedo-Galerkin. Como um dos objetivos deste trabalho é a aproximação do modelo, os domínios utilizados são poliedros (dimensão 3) ou polígonos (dimensão 2) com fronteira localmente Lipschitz. Demonstra-se também um resultado de unicidade para a solução dada pelo resultado de existência em alguns domínios não suaves de dimensão 2. Após, apresenta-se um esquema totalmente discreto linear baseado em uma formulação mista, utilizando-se elementos finitos de classe C^0 para a discretização no espaço e um esquema de Euler semi-implícito para a discretização no tempo. Mostra-se a convergência das soluções aproximadas para soluções fracas, dadas pelo resultado de existência. Finalmente, faz-se a análise do erro discreto para soluções suficientemente regulares.

Palavras-chave: Equações de Ericksen-Leslie; Cristais líquidos nemáticos, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

A penalized version of the Ericksen-Leslie model for the flow of nematic liquid crystals is considered. We study the existence of solutions by the Faedo-Galerkin method. Since one of the objectives of this work is the approximation of the model, the domains used are polyhedra (dimension 3) or polygons (dimension 2) with locally Lipschitz boundary. We also demonstrate a uniqueness result for the solution given by the existence result on some non-smooth domains of dimension 2. After, we present a linear fully discrete scheme based on a mixed formulation, using C^0 finite elements for the space discretization and a semi-implicit Euler scheme for the time discretization. We prove the convergence of the approximate solutions towards weak solutions, given by the existence result. Finally, we analyse the discrete error for sufficiently regular solutions.

Keywords: Ericksen-Leslie equations; Nematic liquid crystals; Finite Element Method.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----|--|----|
| 3.1 | Triangulação com $h = 1/3$ | 70 |
| 3.2 | Triângulos da malha da Figura 3.1. | 71 |

SUMÁRIO

| | |
|---|------------|
| INTRODUÇÃO | 9 |
| 1 DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES | 12 |
| 1.1 Elementos de Análise Funcional | 12 |
| 1.2 Espaços de Funções Integráveis | 16 |
| 1.3 Distribuições e Derivada no Sentido das Distribuições | 22 |
| 1.4 Espaços de Sobolev | 25 |
| 1.5 Espaços de Bochner | 33 |
| 2 O MODELO SIMPLIFICADO DE ERICKSEN-LESLIE | 41 |
| 2.1 Existência de Solução para o Modelo Penalizado | 42 |
| 2.1.1 Existência de solução para o sistema penalizado aproximado | 48 |
| 2.1.2 Estimativas a priori independentes de m | 51 |
| 2.1.3 Estimativas a priori independentes de m para as derivadas temporais | 52 |
| 2.1.4 Convergência em m e passagem ao limite | 54 |
| 2.2 Sobre a Unicidade de Solução para o Modelo Penalizado | 61 |
| 3 APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS | 66 |
| 3.1 Alguns Resultados sobre o Problema de Stokes Estacionário | 66 |
| 3.1.1 Aproximação de um espaço de normado | 67 |
| 3.1.2 A condição de $inf-sup$ | 74 |
| 3.1.3 Análise do erro | 78 |
| 3.1.4 Alguns operadores restrição | 80 |
| 3.2 Formulação Variacional | 89 |
| 3.3 Discretização no Espaço e no Tempo | 92 |
| 3.4 Convergência do Esquema Totalmente Discreto | 99 |
| 3.5 Análise do Erro | 111 |
| REFERÊNCIAS | 125 |

INTRODUÇÃO

Algumas substâncias podem apresentar algumas fases entre a transição da fase sólida para a fase líquida. Nessas fases a substância pode apresentar características de um cristal (sólido) e um líquido. Estas substâncias são chamadas de cristais líquidos. Para ilustrar, um cristal líquido pode fluir, como um líquido, mas suas moléculas podem apresentar alguma ordem, como orientação ou posição, o que é observado em sólidos.

Existem diferentes tipos de cristais líquidos (veja [11] e [8]), neste texto é considerada a fase nemática de cristais líquidos termotrópicos (aqueles que apresentam diferentes fases de acordo com a temperatura) e uniaxiais (cujas moléculas podem ser aproximadas por bastões ou cilindros). Nessa fase, as moléculas do cristal líquido fluem com seus respectivos centros de massa distribuídos de forma aleatória, como em um líquido, mas apresentam uma ordem na orientação das moléculas, que tende a ser paralela a um vetor unitário d , que chamaremos de vetor diretor.

Um fato que torna os cristais líquidos atrativos é que as moléculas alongadas do cristal líquido apresentam propriedades diferentes, como em relação à refração da luz, por exemplo, de acordo com a sua orientação. Também ocorre que o vetor diretor, ou seja, a direção das moléculas, pode ser alterado por campos elétricos ou magnéticos. Essas duas propriedades permitem, entre outras coisas, a aplicação de cristais líquidos na confecção de mostradores de cristal líquido, os LCDs (Liquid Crystal Display).

Um modelo bastante explorado para a fase nemática de cristais líquidos é o modelo simplificado de Ericksen-Leslie. Este modelo é um acoplamento entre as equações de Navier-Stokes e as equações que tratam do comportamento do vetor diretor. O acoplamento entre as duas equações reflete o fato de que o vetor diretor influencia no escoamento do fluido bem como o escoamento do fluido influencia no vetor diretor.

Sendo u a velocidade do fluido, d o vetor diretor e p a pressão, o modelo simplificado de Ericksen-Leslie é:

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

$$|d| = 1, \quad \partial_t d + u \cdot \nabla d - \gamma \Delta d - \gamma |\nabla d|^2 d = 0, \quad (3)$$

com as condições iniciais e de contorno

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \nabla \cdot u_0(x) = 0 \text{ e } d(x, 0) = d_0(x) \quad (4)$$

$$u(x, t) = 0, \quad d(x, t) = l(x, t), \quad \text{para } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, \infty). \quad (5)$$

Os números $\nu, \lambda, \gamma > 0$ são constantes físicas e a equação (2) é a condição de incompressibilidade.

A condição de $|d| = 1$ no modelo de Ericksen-Leslie simplificado é difícil de tratar tanto do ponto de vista teórico quanto numérico [13], por isso, utiliza-se uma versão penalizada deste modelo, com

$$|d| \leq 1, \quad \partial_t d + (u \cdot \nabla)d - \gamma(\Delta d - f_\varepsilon(d)) = 0$$

no lugar de (3), onde $f_\varepsilon = \varepsilon^{-2}(|d|^2 - 1)d$. O número $\varepsilon > 0$ é um parâmetro fixo de penalização.

Como o objetivo do presente trabalho é a aproximação numérica da solução do modelo para cristais líquidos, utiliza-se o modelo penalizado:

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) = 0$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$|d| \leq 1, \quad \partial_t d + (u \cdot \nabla)d - \gamma(\Delta d - f_\varepsilon(d)) = 0$$

com o domínio Ω sendo um polígono localmente Lipschitz em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . O texto utilizado como base foi o artigo de Girault e Guillén-González [13].

A aproximação numérica da solução de um sistema de equações diferenciais pelo método dos elementos finitos consiste em gerar uma sequência de soluções aproximadas que converge para uma solução do problema. Nesse caso, é importante conhecer resultados sobre existência e unicidade de solução para o sistema de equações.

A existência de solução para o modelo penalizado é demonstrada no artigo de Girault e Guillén-González [13] com base no artigo de Lin e Liu [22], que utilizam um método semi-Galerkin, com um argumento de ponto fixo para demonstrar a existência de soluções aproximadas. No presente trabalho aplica-se o método de Faedo-Galerkin.

O problema de unicidade de solução para o modelo penalizado é similar ao problema de unicidade de solução para as equações de Navier-Stokes. Em dimensão 3 não se pode garantir, em geral, que a solução dada pelo resultado de existência é única. Sob certas hipóteses, a unicidade de solução para o modelo penalizado é demonstrado no artigo de Guillén-González, Rodríguez-Bellido e Rojas-Medar [17]. No presente trabalho é apresentado um resultado de unicidade de solução no caso bidimensional para alguns domínios não-suaves.

Em se tratando da aproximação numérica do modelo penalizado, com o intuito de evitar a utilização de espaços de funções C^1 por partes na aproximação do vetor diretor d , introduz-se Δd como variável e propõe-se uma formulação mista para o problema. Em seguida, é apresentado um esquema totalmente discreto e linearizado, isto é, uma discretização no espaço e no tempo na qual o problema a ser resolvido em cada iteração é um sistema linear. É demonstrada a convergência do esquema totalmente discreto para a solução dada pelo resultado de existência de solução e, no final, sob certas

hipóteses sobre a regularidade da solução, são apresentadas as estimativas do erro entre a solução dada pela discretização e a solução exata do problema.

O trabalho está organizado como segue. No capítulo 1 são apresentadas definições e resultados que são frequentemente utilizados no decorrer do trabalho, bem como referências bibliográficas que podem ser consultadas para se obter mais detalhes. No capítulo 2 é apresentado o modelo de Ericksen-Leslie penalizado e se define mais precisamente qual o tipo de solução que se busca. Em seguida, demonstra-se a existência de solução para o modelo penalizado e, finalmente, apresenta-se o resultado de unicidade mencionado. O capítulo 3 começa com mais uma seção de definições e resultados preliminares. Além do que já foi apresentado no capítulo 1 são apresentados definições e resultados que aparecem com frequência na aproximação numérica de EDPs, principalmente pelo método dos elementos finitos, e que são bastante utilizados no texto. Em seguida, são propostas a formulação mista do modelo penalizado e a sua discretização no espaço e no tempo. É demonstrada a convergência desse esquema totalmente discreto e, por fim, faz-se a análise do erro.

Capítulo 1

DEFINIÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar definições e resultados da teoria matemática que são bastante utilizados no decorrer do trabalho e que também são, de forma geral, muito úteis ao estudo de equações diferenciais parciais. O texto também contém referências onde é possível encontrar as demonstrações dos resultados e mais informações sobre cada assunto.

O capítulo está organizado em cinco seções: Elementos de Análise Funcional, Espaços de Funções integráveis, Distribuições e Derivada no Sentido das Distribuições, Espaços de Sobolev, e Espaços de Bochner.

1.1 Elementos de Análise Funcional

Neste texto serão utilizados somente espaços vetoriais reais. Dado um espaço normado X , denotaremos por $\|\cdot\|_X$ a sua norma. Se X for um espaço com produto interno então seu produto interno será denotado por $(\cdot, \cdot)_X$. Um espaço normado é dito de Banach se é completo (em relação à sua norma) e um espaço com produto interno é dito de Hilbert se é completo em relação à norma induzida pelo produto interno.

Definição 1.1 (Conjunto compacto). Dizemos que um subconjunto A de um espaço métrico E é compacto se toda sequência de elementos de A admite uma subsequência convergente em A .

□

Observação 1.1. Todo conjunto compacto é fechado e limitado. Em espaços normados, a recíproca é verdadeira apenas para espaços normados de dimensão finita. Mais precisamente, um subconjunto fechado e limitado de um espaço normado é compacto se, e somente se, a dimensão do espaço normado é finita.

□

Definição 1.2 (Conjunto pré-compacto). Dizemos que um subconjunto A de um espaço métrico E é pré-compacto, ou relativamente compacto, se o seu fecho é compacto.

□

Observação 1.2. Todo conjunto pré-compacto é limitado. De fato, um conjunto pré-compacto está contido em um conjunto compacto, seu fecho, que é limitado.

□

Proposição 1.1 (Desigualdade de Young). *Sejam A e B números reais não negativos e sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Temos que*

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}.$$

Demonstração. Esta desigualdade é muito útil para se estimar um produto por uma soma de dois termos e também é utilizada na demonstração de outra desigualdade, conhecida como desigualdade de Hölder. Uma demonstração da desigualdade de Young pode ser encontrada no livro de Kreyszig [21], sendo utilizada na sequência para demonstrar a desigualdade de Hölder para séries. Outra demonstração para a desigualdade de Young pode ser encontrada no livro de Bartle [2], no início da demonstração da desigualdade de Hölder para integrais, no capítulo 6. ■

Proposição 1.2 (Desigualdade de Hölder para Séries). *Sejam $p, q > 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e (ξ_n) e (η_n) sequências de números reais tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q < \infty$. Temos que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n \eta_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \right)^{1/q} < \infty.$$

Demonstração. Veja o livro de Kreyszig [21]. ■

Definição 1.3 (Conjunto separável). *Um subconjunto X de um espaço normado é dito separável se contém um subconjunto enumerável e denso em X .*

□

Dado um espaço normado X , denotemos por X' o seu dual topológico, isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos na topologia da norma definidos em X . É comum denotar a imagem de um elemento $x \in X$ por um funcional $f \in X'$ por $f(x)$. Neste texto também será utilizada a notação $\langle f, x \rangle$.

Sendo X completo ou não, tem-se que X' é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{X'} = \sup_{x \neq 0} \frac{f(x)}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X=1} f(x). \quad (1.1)$$

Como X' é um espaço normado, podemos falar do seu dual, X'' , também chamado de bidual de X . Para cada $x \in X$, defina em X' o funcional linear $F(x) : X' \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\langle F(x), f \rangle = \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in X'. \quad (1.2)$$

Pode-se mostrar que $F(x) \in X''$ e que $F : X \longrightarrow X''$ dada por $x \mapsto F(x)$ é uma transformação linear injetiva, contínua e tal que $\|F(x)\|_{X''} = \|x\|_X$. A transformação linear F é chamada de injeção canônica de X em X'' .

Definição 1.4 (Espaço reflexivo). *Um espaço normado é dito reflexivo se a injeção canônica é sobrejetiva.*

□

Proposição 1.3. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Veja o teorema 4.6-6, na seção 4.6 do capítulo 4 do livro de Kreyszig [21]. ■

Sobre espaços de Banach separáveis temos os seguintes resultados.

Proposição 1.4. *Todo subconjunto de um espaço métrico separável é separável. Em particular, todo subespaço de um espaço de Banach separável é separável.*

Demonstração. Veja a proposição 3.25 do livro de Brezis [3]. ■

Proposição 1.5. *Seja X um espaço de Banach. Se X' é separável então X é separável.*

Demonstração. Veja o teorema 3.26 do livro de Brezis [3]. ■

Sobre espaços de Banach reflexivos temos os seguintes resultados.

Proposição 1.6. *Todo subespaço vetorial fechado de um espaço de Banach reflexivo é reflexivo.*

Demonstração. Veja a proposição 3.20 do livro de Brezis [3]. ■

Proposição 1.7. *Um espaço de Banach é reflexivo se, e somente se, seu dual é reflexivo.*

Demonstração. Veja o corolário 3.21 do livro de Brezis [3]. ■

Proposição 1.8. *Um espaço de Banach é reflexivo e separável se, e somente se, seu dual é reflexivo e separável.*

Demonstração. Veja o corolário 3.27 do livro de Brezis [3]. ■

Definição 1.5 (Convergência fraca). *Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência (x_n) de elementos de X converge fracamente, ou converge fraco, para $x \in X$ se*

$$f(x_n) \longrightarrow f(x), \quad \forall f \in X',$$

quando $n \rightarrow \infty$.

□

Definição 1.6 (Convergência fraca estrela). *Seja X um espaço normado. Dizemos que uma sequência (f_n) de elementos de X' converge fraco* (fraco estrela) para $f \in X'$ se*

$$\langle F(x), f_n \rangle \longrightarrow \langle F(x), f \rangle, \quad \forall x \in X,$$

quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, se

$$f_n(x) \longrightarrow f(x), \quad \forall x \in X,$$

quando $n \rightarrow \infty$.

□

É possível definir em X uma topologia que induz a convergência fraca. Também é possível definir em X' uma topologia que induz a convergência fraca*. Para mais informações, veja o capítulo 3 do livro de Brézis [3].

A grande motivação para utilizar as topologias fraca e fraca* está em recuperar, sob certas hipóteses, ainda que em um sentido mais fraco, a existência de uma subsequência convergente quando a sequência em questão é limitada em algum espaço normado de dimensão infinita.

Proposição 1.9. *Seja X um espaço de Banach reflexivo. Então toda sequência limitada de elementos de X admite uma subsequência convergente na topologia fraca de X .*

Demonstração. Veja o teorema 3.18 do livro de Brezis [3].

■

Proposição 1.10. *Seja X um espaço de Banach separável. Então toda sequência limitada de elementos de X' admite uma subsequência convergente na topologia fraca* de X' .*

Demonstração. Veja o corolário 3.30 do livro de Brezis [3].

■

Definição 1.7 (Imersão contínua). *Dizemos que um espaço normado X está continuamente imerso no espaço normado Y , ou que a imersão $X \subset Y$ é contínua, e denotamos tal fato por $X \hookrightarrow Y$ se o operador linear inclusão*

$$I : X \longrightarrow Y$$

$$x \mapsto Ix = x$$

é contínuo, isto é, se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|x\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

□

Observação 1.3. Existem casos em que as exigências de que X seja um subespaço de Y e de que o operador inclusão seja a “identidade” são enfraquecidas para permitir que identificações usuais de X com subespaços vetoriais de Y , isto é, transformações lineares contínuas e injetivas de X em Y , sejam utilizadas como inclusões, veja o capítulo 1 do livro de Adams e Fournier [1].

□

Observação 1.4. Sejam X e Y são dois espaços normados, com X continuamente imerso em Y . Para cada $f \in Y'$ temos que a restrição de f a $I(X)$, $f|_{I(X)}$, é um elemento de X' e

$$\|f|_{I(X)}\|_{X'} = \sup_{x \in X - \{0\}} \frac{f(I(x))}{\|x\|_X} \leq \sup_{x \in X - \{0\}} C \frac{f(I(x))}{\|I(x)\|_Y} \leq \sup_{y \in Y - \{0\}} C \frac{f(y)}{\|y\|_Y} = C \|f\|_{Y'}.$$

Pode-se mostrar que $f \mapsto f \circ I$ é uma transformação linear injetiva e contínua de Y' em X' . Logo, se X está continuamente imerso em Y então Y' está continuamente imerso em X' .

□

Definição 1.8 (Operador compacto). Um operador linear $T : X \longrightarrow Y$ é dito compacto se, dado um conjunto limitado $A \subset X$, a imagem de A por T , $T(A)$, é um pré-compacto em Y .

□

Observação 1.5. Decorre da definição que todo operador compacto é contínuo. De fato, um operador linear é contínuo se, e somente se, leva conjuntos limitados em conjuntos limitados. E segue da definição que a imagem de um conjunto limitado por um operador compacto é um conjunto limitado.

□

Definição 1.9 (Imersão compacta). Dizemos que um espaço normado X está compactamente imerso no espaço normado Y , ou que a imersão $X \subset Y$ é compacta, e denotamos tal fato por $X \xhookrightarrow{c} Y$ se o operador linear inclusão de X em Y é compacto.

□

1.2 Espaços de Funções Integráveis

Seja X um conjunto qualquer.

Definição 1.10 (σ -álgebra). Uma σ -álgebra sobre X é uma família \mathbb{X} de subconjuntos de X tal que

1. $X \in \mathbb{X}$;
2. Se $A \in \mathbb{X}$ então $A^c \in \mathbb{X}$;

3. Se $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em \mathbb{X} então $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathbb{X}$.

□

O par (X, \mathbb{X}) é chamado de espaço mensurável e os elementos da σ -álgebra \mathbb{X} são chamados de conjuntos mensuráveis.

Definição 1.11 (Medida). Uma função μ definida em um espaço mensurável (X, \mathbb{X}) e assumindo valores na reta estendida é dita uma medida se

1. $\mu(\emptyset) = 0$;
2. $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathbb{X}$;
3. Se $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos em \mathbb{X} , dois a dois disjuntos, então

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

□

A tripla (X, \mathbb{X}, μ) é chamada de espaço de medida e, dado um conjunto $A \in \mathbb{X}$, o número $\mu(A)$ é chamado de medida de A . Quando estiver claro qual a σ -álgebra e qual a medida utilizada, escrevemos apenas X em vez de (X, \mathbb{X}, μ) .

Definição 1.12. Considere o espaço de medida (X, \mathbb{X}, μ) . Diz-se que uma propriedade vale em quase todo ponto de X , ou qtp em X , se os pontos onde ela não se verifica formam um subconjunto de X mensurável e de medida nula.

□

Definição 1.13 (Função mensurável). Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é dita mensurável se o conjunto

$$\{x \in X \mid f(x) > \alpha\}$$

é mensurável para cada $\alpha \in \mathbb{R}$.

□

É interessante saber que algumas funções relacionadas a funções mensuráveis também são mensuráveis.

Proposição 1.11. Sejam f e g funções reais mensuráveis e $c \in \mathbb{R}$. Então cf , $f + g$, fg e $|f|$ são mensuráveis.

Demonstração. Veja o lema 2.6 do livro de Bartle [2]. ■

Dada uma função real f , defina as funções não negativas

$$f^+(x) = \max \{f(x), 0\} \text{ e } f^-(x) = \max \{-f(x), 0\}.$$

As funções f^+ e f^- são chamadas de parte positiva e parte negativa de f , respectivamente. Note que

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)) \text{ e } f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)),$$

de onde segue que as partes positiva e negativa de uma função mensurável são mensuráveis.

Definição 1.14 (Função característica). A função característica de um conjunto $A \subset X$ é a função $\chi_A : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ se } x \in A \\ 0 & , \text{ se } x \notin A. \end{cases}$$

□

Definição 1.15 (Função simples). Uma função simples é uma função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ que assume apenas uma quantidade finita de valores distintos. Pode-se mostrar que toda função simples tem representação única da forma

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{A_i}(x) \tag{1.3}$$

quando os valores α_i são distintos e os conjuntos A_i são dois a dois disjuntos.

□

Note que χ_A e φ são funções mensuráveis se, e somente se, os conjuntos A e A_i são conjuntos mensuráveis.

Proposição 1.12. Dada uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ mensurável e não negativa, existe uma sequência de funções simples mensuráveis (φ_j) tal que

1. $0 \leq \varphi_j(x) \leq \varphi_{j+1}(x)$, $\forall x \in X$ e $\forall j \in \mathbb{N}$,
2. $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi_j(x)$, $\forall x \in X$.

Demonstração. Veja o lema 2.11 do livro de Bartle [2]. ■

Dado um espaço de medida (X, \mathbb{X}, μ) , a integral de uma função simples φ com representação (1.3) é definida como

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j).$$

Utilizando a definição de integral para funções simples, podemos definir a integral para funções mais gerais. Definimos a integral de uma função f mensurável e não negativa como o supremo das integrais de funções simples tais que $\varphi(x) \leq f(x)$, para todo $x \in X$, isto é

$$\int_X f \, d\mu = \sup_{\varphi \leq f} \int_X \varphi \, d\mu.$$

Uma função mensurável e não negativa f é dita integrável se

$$\int_X f \, d\mu < \infty.$$

Para uma função mensurável f que assume valores reais quaisquer, se f^+ e f^- são integráveis então f é dita integrável e a integral é definida como

$$\int_X f \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu.$$

A integral de f sobre um conjunto $A \in \mathbb{X}$ é dada por

$$\int_A f \, d\mu = \int_X \chi_A f \, d\mu.$$

Note que

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_X f^+ \, d\mu + \int_X f^- \, d\mu.$$

Proposição 1.13. *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Tem-se que f é integrável se, e somente se, $|f|$ é integrável. Além disso, se f é integrável então*

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X |f| \, d\mu.$$

Demonstração. Veja o teorema 5.3 do livro de Bartle [2]. ■

Poderíamos continuar o texto considerando o espaço de medida abstrato (X, \mathbb{X}, μ) , mas nos voltamos agora para o caso em que $X = \Omega$, um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , \mathbb{X} é a σ -álgebra de Lebesgue sobre Ω e μ é a medida de Lebesgue. Neste caso, a integral obtida é a chamada “integral de Lebesgue”.

Pode-se mostrar que o conjunto das funções integráveis é um espaço vetorial com a operação de soma

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

e de produto por escalar

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

para quaisquer f e g , funções integráveis, e $\alpha \in \mathbb{R}$, sendo a função identicamente nula o elemento neutro da soma. No espaço vetorial das funções integráveis a função que faz

$$f \mapsto \int_{\Omega} |f| \, dx,$$

onde dx denota a medida de Lebesgue, é uma seminorma. De fato, para quaisquer f e g , funções integráveis, e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |f| \, dx &\geq 0, \\ \int_{\Omega} |\alpha f| \, dx &= |\alpha| \int_{\Omega} |f| \, dx, \\ \int_{\Omega} |f + g| \, dx &\leq \int_{\Omega} |f| \, dx + \int_{\Omega} |g| \, dx,\end{aligned}$$

mas não é verdade que

$$\int_{\Omega} |f| \, dx = 0 \iff f(x) = 0, \forall x \in X.$$

Proposição 1.14. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função integrável. Temos que $f(x) = 0$ qtp em Ω se, e somente se,*

$$\int_{\Omega} |f| \, dx = 0.$$

Demonstração. Decorre do corolário 4.10 do livro de Bartle [2]. ■

Motivados pela proposição 1.14, consideremos a relação de equivalência “ \sim ” sobre funções mensuráveis de Ω em \mathbb{R} dada por

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ qtp.}$$

Definimos, então, o espaço das funções integráveis como sendo o quociente

$$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} \mid \int_{\Omega} |f(x)| \, dx < \infty \right\} / \sim,$$

que é um espaço vetorial normado com a norma

$$\|[f]\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |g| \, dx,$$

onde g é uma representante qualquer da classe de equivalência de f , $[f]$. No que segue, faremos esta identificação de f com sua classe de equivalência $[f]$ sem mais comentários.

De maneira mais geral, para $p \in [1, \infty)$, definimos o espaço das funções p -integráveis por

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < \infty \right\} / \sim$$

equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$ definimos

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ mensurável} \mid \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty \right\} / \sim$$

equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

Quando $p = 2$, a norma $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ provém do produto interno

$$(f, g) = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in L^2(\Omega).$$

Os espaços $L^p(\Omega)$, equipados com as respectivas normas $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$, são espaços de Banach. Em particular, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Como a integral do produto de duas funções é um produto interno em $L^2(\Omega)$, vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz, mas, de forma mais geral, vale a desigualdade de Hölder para integrais.

Proposição 1.15 (Desigualdade de Hölder para Integrais). *Sejam $p, q \in (1, \infty)$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ou defina $q = \infty$ se $p = 1$. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$ então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x) dx \right| \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja o resultado 6.9, no capítulo 6 do livro de Bartle [2]. ■

Observação 1.6. Pode-se mostrar, por indução, que se $p_1, \dots, p_n > 1$ são tais que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ e f_1, \dots, f_n são funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ então

$$\left| \int_{\Omega} f_1(x)f_2(x) \dots f_n(x) dx \right| \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \dots \|f_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}.$$

□

Temos também que, para $p \in (1, \infty)$, isto é, excluindo $p = 1$ e $p = \infty$, os espaços $L^p(\Omega)$ são separáveis e reflexivos. O espaço $L^1(\Omega)$ é apenas separável e $L^\infty(\Omega)$ não é reflexivo nem separável.

Proposição 1.16. *Se Ω é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n então $L^p(\Omega)$ é separável para $p \in [1, \infty)$.*

Demonstração. Veja o teorema 4.13 do capítulo 4 do livro de Brezis [3]. ■

Proposição 1.17. *O espaço $L^p(\Omega)$ é reflexivo para $p \in (1, \infty)$.*

Demonstração. Veja o teorema 4.10 do capítulo 4 do livro de Brezis [3]. ■

Utilizaremos também o fato de que, dados $1 < p, q < \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$, podemos identificar o dual do espaço $L^p(\Omega)$ ao espaço $L^q(\Omega)$. Além disso, quando $p = 1$ o resultado vale para $q = \infty$, isto é, o dual de $L^1(\Omega)$ pode ser identificado ao espaço $L^\infty(\Omega)$. O resultado que nos permite fazer tal identificação é conhecido como teorema da representação de Riesz.

Teorema 1.1. 1. Dado um funcional linear $f \in (L^1(\Omega))'$ existe uma única função $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$f(v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx, \quad \forall v \in L^1(\Omega)$$

$$\text{e } \|f\|_{(L^1(\Omega))'} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

2. Sejam $1 < p, q < \infty$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Dado um funcional linear $f \in (L^p(\Omega))'$ existe uma única função $u \in L^q(\Omega)$ tal que

$$f(v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx, \quad \forall v \in L^p(\Omega)$$

$$\text{e } \|f\|_{(L^p(\Omega))'} = \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada no capítulo 8 do livro de Bartle [2]. ■

Uma função de $L^p(\Omega)$ pode não ser contínua (isto é, sua classe de equivalência pode não ter nenhuma representante contínua), muito menos diferenciável no sentido clássico. Porém, existe um conceito de derivada que nos permite falar da derivada de uma função de $L^p(\Omega)$. Esta derivada é conhecida como derivada fraca ou derivada no sentido das distribuições.

1.3 Distribuições e Derivada no Sentido das Distribuições

Para uma introdução mais detalhada sobre a teoria das distribuições veja as publicações de Hounie [20], Marcelo e Valéria Cavalcanti [5] e Medeiros e Miranda [10].

Definição 1.16 (Suporte de uma função). Seja $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Define-se o suporte de f por

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}.$$

□

Denote por $C_c^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em Ω , isto é, cujos suportes são conjuntos compactos contidos em Ω . Denote por $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções $C_c^\infty(\Omega)$ munido da topologia dada pela seguinte definição de convergência.

Definição 1.17. Uma sequência φ_k de funções de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge a zero se

1. existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que $\text{supp}(\varphi_k) \subset K$, para todo $k \in \mathbb{N}$;
2. para todo inteiro positivo m , as derivadas de ordem m das funções φ_k convergem uniformemente a zero quando $k \rightarrow \infty$.

□

Temos que $\mathcal{D}(\Omega)$ é um espaço vetorial topológico não metrizável, veja o capítulo 1 do livro de Hounie [20]. Ainda assim, podemos falar de funcionais lineares definidos e contínuos em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, do dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.18 (Distribuição). *Uma distribuição sobre Ω é um funcional linear contínuo definido em $\mathcal{D}(\Omega)$. Denota-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial das distribuições sobre Ω .*

Dizemos que uma sequência de distribuições (u_k) converge para uma distribuição u se

$$\langle u_k, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

□

Definição 1.19 (Funções localmente integráveis). *Seja f uma função real definida em Ω . Diz-se que $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ se $f \in L^p(K)$, para todo compacto $K \subset \Omega$. Dizemos que $f_n \rightarrow f$ em $L^p_{loc}(\Omega)$ se $f_n \rightarrow f$ em $L^p(K)$, para todo compacto $K \subset \Omega$.*

□

Note que a imersão

$$L^\infty(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

e que as imersões

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega), \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

são contínuas. Como os conjuntos compactos têm medida finita temos a imersão contínua $L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, logo, valem as imersões contínuas

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega), \quad \text{para } 1 \leq p \leq \infty. \quad (1.4)$$

Toda função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ define uma distribuição $\langle f, \cdot \rangle$ dada por

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.5)$$

Pode-se verificar que esta identificação de $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ com $\langle f, \cdot \rangle \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é contínua. Daí, por (1.4), temos as imersões contínuas

$$L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \quad \text{para } 1 \leq p \leq \infty. \quad (1.6)$$

Por outro lado, nem toda distribuição é dada por uma função como em (1.5). A distribuição conhecida como delta de Dirac,

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}((-1, 1)),$$

por exemplo, não é dada por nenhuma função de $L^1_{loc}(\Omega)$.

Portanto, cada espaço $L^p(\Omega)$ pode ser identificado de maneira contínua com um subespaço próprio de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste sentido, as distribuições são chamadas de funções generalizadas.

Além disso, a distribuição definida por uma função $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ como em (1.5) é única no seguinte sentido.

Proposição 1.18 (Lema de Du Bois Raymond). *Seja $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Temos que*

$$\int_{\Omega} f \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

se, e somente se, $f(x) = 0$ qtp em Ω .

Demonstração. Esse resultado pode ser encontrado na publicação de Medeiros e Miranda [10], é a proposição 1.3.1. ■

Em geral, para definir operações sobre distribuições o que se faz é o seguinte. Suponha que temos um operador linear e contínuo, L , definido sobre funções $C_c^\infty(\Omega)$ que gostaríamos de estender às distribuições e suponha que exista um operador linear e contínuo de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, L' , tal que

$$\int_{\Omega} (L\phi)\psi \, dx = \int_{\Omega} \phi(L'\psi) \, dx, \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (1.7)$$

Temos que

$$\phi, L\phi, \psi, L'\psi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega),$$

logo, (1.7) pode ser escrita como

$$\langle L\phi, \psi \rangle = \langle \phi, L'\psi \rangle. \quad (1.8)$$

Agora, com (1.8), estenda L para qualquer distribuição fazendo

$$\langle \tilde{L}u, \varphi \rangle = \langle u, L'\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad (1.9)$$

para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Note que $\tilde{L}u$ é um funcional em $\mathcal{D}(\Omega)$ e que se $\varphi_k \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então, por hipótese, $L'\varphi_k \rightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, logo,

$$\langle u, L'\varphi_k \rangle \rightarrow 0,$$

isto é, $\tilde{L}u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, se $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ então

$$\langle \tilde{L}u, \varphi \rangle = \langle u, L'\varphi \rangle = \int_{\Omega} (Lu)\varphi \, dx = \langle Lu, \varphi \rangle,$$

ou seja, estendemos L a todas as distribuições, como queríamos.

Com essas ideias é possível estender várias operações às distribuições, como produtos por funções, mudança de variáveis e derivação, por exemplo, veja o capítulo 3 do livro de Hounie [20]. No momento, interessa-nos estender a derivação às distribuições.

Seja $j \in \mathbb{Z}^n$ um vetor de inteiros não negativos e defina

$$|j| = \sum_{i=1}^n j_i.$$

Considere o operador diferencial

$$D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_n^{j_n} \dots \partial x_2^{j_2} \partial x_1^{j_1}}.$$

Para uma função $f \in C_c^\infty(\Omega)$ tem-se que

$$\int_{\Omega} (D^j f) \varphi \, dx = (-1)^{|j|} \int_{\Omega} f (D^j \varphi) \, dx,$$

basta integrar por partes, isto é, se $L = D^j$ então $L' = (-1)^{|j|} D^j$. Então, definimos a derivada D^j de uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ como sendo a distribuição

$$\langle D^j u, \varphi \rangle = (-1)^{|j|} \langle u, D^j \varphi \rangle. \quad (1.10)$$

Assim, toda distribuição tem derivadas de todas as ordens. Em particular, toda função de $L^p(\Omega)$ tem derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

1.4 Espaços de Sobolev

Interessam-nos também os subespaços de $L^p(\Omega)$ compostos por funções cujas derivadas no sentido das distribuições são funções de $L^p(\Omega)$, são os chamados espaços de Sobolev.

Dados m inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ por

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \mid D^j u \in L^p(\Omega), \text{ se } |j| \leq m \right\}$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|j| \leq m} \|D^j u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},$$

se $p \in [1, \infty)$, e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|j| \leq m} \|D^j u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

sendo que as derivadas D^j são tomadas no sentido das distribuições. Quando $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ e a norma $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$ provém do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j| \leq m} (D^j u, D^j v).$$

Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$, equipados com suas respectivas normas $\|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)}$, são espaços de Banach. Em particular, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Proposição 1.19. *Os espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são reflexivos para $p \in (1, \infty)$ e separáveis para $p \in [1, \infty)$.*

Demonstração. Veja a proposição 9.1, na seção 1 do capítulo 9 do livro de Brezis [3]. ■

Note que $C_c^\infty(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, para todo inteiro positivo m e $1 \leq p \leq \infty$. Mais do que isso, vale o seguinte resultado.

Proposição 1.20. *O espaço $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, para $p \in [1, \infty)$.*

Demonstração. Esse resultado é enunciado na proposição 4.23 na seção 4 do capítulo 4 do livro de Brezis [3]. Em sua demonstração, utiliza-se o que é desenvolvido na seção em questão sobre convolução e regularização. ■

Isso não é verdade, em geral, para os espaços $W^{m,p}(\Omega)$. Só se pode afirmar o seguinte.

Proposição 1.21. *O espaço $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, para $p \in [1, \infty)$.*

Demonstração. Veja o teorema 9.2, na seção 1 do capítulo 9 do livro de Brezis [3]. ■

No entanto, os fechos de $C_c^\infty(\Omega)$ nos espaços $W^{m,p}(\Omega)$ são importantes no estudo de EDPs, por isso, definimos

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \text{fecho de } C_c^\infty(\Omega) \text{ em } W^{m,p}(\Omega).$$

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ são subespaços fechados de espaços de Banach, portanto, são espaços de Banach. Novamente, quando $p = 2$ escrevemos $H_0^m(\Omega)$ em vez de $W_0^{m,2}(\Omega)$ e temos que $H_0^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Os duais dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ são denotados por $W^{-m,q}(\Omega)$. Em particular, os duais dos $H^m(\Omega)$ são denotados por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.22 (Desigualdade de Poincaré). *Seja $p \in [1, \infty)$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado. Existe uma constante $C = C(p, \Omega) > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração. Veja o corolário 9.19, na seção 4 do capítulo 9 do livro de Brezis [3]. ■

Observação 1.7. Segue da desigualdade de Poincaré que a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma em $W_0^{1,p}(\Omega)$ equivalente a $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$. Em particular, em $H_0^1(\Omega)$, a expressão

$$((u, v)) = \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx$$

é um produto interno e induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, que é equivalente a $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

□

Em relação aos espaços de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, valem as imersões contínuas

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\subset L^q(\mathbb{R}^n), & \text{onde } \frac{1}{q} &= \frac{1}{p} - \frac{m}{n}, & \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0, \\ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\subset L^q(\mathbb{R}^n), & \forall q &\in [p, \infty), & \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0, \\ W^{m,p}(\mathbb{R}^n) &\subset L^\infty(\mathbb{R}^n), & & & \text{se } \frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

que podem ser encontradas no capítulo 9 do livro de Brezis [3].

Para os espaços de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, se existir um prolongamento de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, isto é, um operador linear contínuo

$$P : W^{m,p}(\Omega) \longrightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$$

tal que $Pu(x) = u(x)$, para todo $x \in \Omega$, então as imersões contínuas (1.11) continuam valendo ao se substituir \mathbb{R}^n por Ω . Se, além de existir o operador P , o conjunto Ω é um aberto limitado então valem as imersões compactas

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega), & \forall q &\in [1, p^*), & \text{onde } \frac{1}{p^*} &= \frac{1}{p} - \frac{m}{n}, & \text{se } p < n, \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset L^q(\Omega), & \forall q &\in [1, \infty), & & & \text{se } p = n, \\ W^{1,p}(\Omega) &\subset C(\overline{\Omega}), & & & & & \text{se } p > n. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Em particular, vale a imersão compacta

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega). \quad (1.13)$$

Vejamos quando tal operador prolongamento existe.

Se considerarmos os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ então, dada $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, a extensão por zero fora de Ω ,

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & , \text{ se } x \in \Omega, \\ 0 & , \text{ se } x \notin \Omega, \end{cases}$$

é um elemento de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, isto é, $u \mapsto \tilde{u}$ é um prolongamento de $W_0^{m,p}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, sem nenhuma exigência sobre a regularidade do conjunto Ω .

Quando se trata dos espaços $W^{m,p}(\Omega)$ não se pode mais simplesmente estender por zero fora de Ω . Neste caso é necessária alguma regularidade sobre a fronteira do conjunto Ω .

Definição 1.20. *Um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^n , Ω , é dito localmente Lipschitz se cada ponto x de sua fronteira tem uma vizinhança U_x tal a interseção da fronteira de Ω com U_x é o gráfico de uma função Lipschitz.*

□

Teorema 1.2. Fixado $p \in [1, \infty]$, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto aberto, limitado e localmente Lipschitz então, para todo inteiro $m \geq 0$, existe um operador linear limitado $P : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, chamado de operador de extensão ou prolongamento, tal que

$$(Pu)|_{\Omega} = u$$

e existe uma constante positiva $C = C(m, p)$ tal que

$$\|Pu\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C(m, p) \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja o teorema 5.24 do livro de Adams e Fournier [1] e a referência lá citada. ■

O caso que mais nos interessa é o caso $p = 2$ e $m = 1$ com Ω aberto e limitado. Neste caso, se Ω é localmente Lipschitz então, pelo teorema 1.2, existe um operador prolongamento $P : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

1. $(Pu)|_{\Omega} = u$;
2. $\|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C(0, 2) \|u\|_{L^2(\Omega)}$;
3. $\|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(1, 2) \|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Ainda para $H^1(\Omega)$, com Ω localmente Lipschitz, temos as imersões contínuas

$$\begin{aligned} \text{Se } n = 2 \text{ então } H^1(\Omega) &\subset L^q(\Omega), \quad q \in [2, \infty); \\ \text{se } n \geq 3 \text{ então } H^1(\Omega) &\subset L^q(\Omega), \quad q = \frac{2n}{n-2}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Para $H_0^1(\Omega)$, com Ω um aberto qualquer, temos as imersões contínuas

$$\begin{aligned} \text{Se } n = 2 \text{ então } H_0^1(\Omega) &\subset L^q(\Omega), \quad q \in [2, \infty); \\ \text{se } n \geq 3 \text{ então } H_0^1(\Omega) &\subset L^q(\Omega), \quad q = \frac{2n}{n-2}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Considere o conjunto

$$\mathcal{V} = \{u \in C_c^\infty(\Omega) \mid \operatorname{div} u = 0\},$$

e os espaços de Hilbert

$$H = \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } L^2(\Omega),$$

e

$$V = \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } H_0^1(\Omega).$$

Nas equações de Navier-Stokes, o tratamento da não-linearidade

$$u \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n u_i D_i u$$

é feito pelo estudo da forma

$$\begin{aligned} b(u, v, w) &= (u \cdot \nabla v, w) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v) \cdot w dx \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_i (D_i v_j) w_j dx. \end{aligned}$$

Considere o espaço de Banach

$$\tilde{V} = \text{fecho de } \mathcal{V} \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega).$$

Temos alguns resultados sobre a forma b .

Lema 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado ou não, com n qualquer. A forma b está bem definida, é trilinear e contínua em $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times (H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega))$.*

Demonstração. Veja o lema 1.1 no capítulo 2 do livro de Temam [25]. ■

Um caso particular do lema 1.1 é o seguinte.

Lema 1.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, limitado ou não, com n qualquer. A forma b está bem definida, é trilinear e contínua em $V \times V \times \tilde{V}$. Se Ω é limitado e $n \leq 4$ então b é uma forma trilinear contínua em $V \times V \times V$.*

Lema 1.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto qualquer. Temos que*

1. $b(u, v, v) = 0, \forall u \in V, \forall v \in (H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)),$
2. $b(u, v, w) = -b(u, w, v), \forall u \in V, \forall v, w \in (H_0^1(\Omega) \cap L^n(\Omega)).$

Demonstração. Veja o lema 1.3 no capítulo 2 do livro de Temam [25]. ■

Pelos lemas 1.2 e 1.3, se Ω é limitado e $n \leq 4$ então

1. $b(u, v, v) = 0, \forall u, v \in V,$
2. $b(u, v, w) = -b(u, w, v), \forall u, v, w \in V.$

Em relação à norma $\|\cdot\|_{L^4(\Omega)}$ de uma função a valores reais, $u \in H_0^1(\Omega)$, temos o seguinte resultado.

Lema 1.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto qualquer,*

1. *se $n = 2$ então*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/4} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}, \forall u \in H_0^1(\Omega);$$

2. *se $n = 3$ então*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq 2^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{3/4}, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Veja os lemas 3.4 e 3.5 no capítulo 3 do livro de Temam [25]. ■

Como $H^1(\mathbb{R}^n) = H_0^1(\mathbb{R}^n)$, segue do teorema 1.2 e do lema 1.4 que, para $u \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^4(\Omega)} &\leq \|Pu\|_{L^4(\mathbb{R}^n)} \leq M \|Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^\alpha \|\nabla Pu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha} \\ &\leq MC \|u\|_{L^2(\Omega)}^\alpha \|Pu\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha} \\ &\leq MC \|u\|_{L^2(\Omega)}^\alpha C \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-\alpha} \end{aligned}$$

onde $M, C > 0$ são constantes e $\alpha = 1/2$ se $n = 2$ e $\alpha = 1/4$ se $n = 3$.

Portanto, fica demonstrado o seguinte lema.

Lema 1.5. *Seja Ω um aberto limitado localmente Lipschitz. Então existe uma constante $\beta > 0$*

1. *se $n = 2$ então*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1/2}, \forall u \in H^1(\Omega);$$

2. *se $n = 3$ então*

$$\|u\|_{L^4(\Omega)} \leq \beta \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{3/4}, \forall u \in H^1(\Omega).$$

Utilizaremos também espaços de Sobolev com ordem de derivada fracionária, mais precisamente os espaços de Hilbert $H^s(\Omega)$, com $s > 0$ um número real. Na publicação de Medeiros e Miranda [10] pode-se encontrar uma definição dos espaços $H^s(\mathbb{R}^N)$ através da transformada de Fourier, sendo estes espaços completos com a norma induzida pelo produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |x|^2)^s u(x)v(x) dx$$

Mostra-se que quando $s = m \in \mathbb{Z}$ tem-se que o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ coincide com o espaço de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^N)$ definido no início da seção.

Os espaços $H^s(\Omega)$, para Ω um aberto limitado, são definidos como os espaços das restrições de funções de $H^s(\mathbb{R}^N)$ a Ω . Mostra-se que quando $s = m \in \mathbb{Z}$ estes espaços coincidem com os espaços $H^m(\Omega)$ desde que Ω admita um operador de extensão como no teorema 1.2.

Outra definição dos espaços $H^s(\Omega)$ pode ser encontrada no livro [12]. É apresentada uma definição dos espaços $W^{s,p}(\Omega)$, com $s > 0$ ainda um número real. Estamos interessados no resultado dado pelo teorema 4.54, no capítulo 4 do livro [12], que nos garante que, para $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado e localmente Lipschitz, com $N = 2$ ou 3 , a imersão

$$H^{1/2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

é compacta.

Finalizaremos a seção com breves comentários e alguns resultados sobre os valores de funções na fronteira de um conjunto que serão úteis no decorrer do trabalho. A princípio, uma função de um espaço de Sobolev pode não estar bem definida em conjuntos de medida nula, mas utilizando a densidade de $C^\infty(\overline{\Omega})$ nos espaços de Sobolev é possível definir o que seria a sua restrição à fronteira de um conjunto. As definições das restrições à fronteira de funções em espaços de Sobolev bem como a caracterização dos espaços aos quais pertencem estas restrições são conhecidas como teoremas de traço. Definamos os espaços de funções definidas na fronteira.

No caso $\Omega = \mathbb{R}_+^N$, $\partial\Omega = \{(x', 0) \mid x' \in \mathbb{R}^{N-1}\}$. Dada a função u definida em $\partial\Omega$, se identificamos u com a função $x' \mapsto u(x', 0)$ que vai de \mathbb{R}^{N-1} para \mathbb{R} temos que $L^p(\partial\Omega)$ pode ser identificado a $L^p(\mathbb{R}^{N-1})$. Nesse caso, definimos $H^s(\partial\Omega)$ como $H^s(\mathbb{R}^{N-1})$.

Suponha que Ω é um aberto limitado do \mathbb{R}^N com fronteira localmente Lipschitz. Considere um sistema de cartas locais de $\partial\Omega$, isto é, $\{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), \dots, (U_l, \phi_l)\}$ sendo as ϕ_j^{-1} tais que aplicam $U_j \cap \partial\Omega$ sobre $(0, 1)^{N-1} \times \{0\}$. Considere também a partição da unidade $\sigma_1, \dots, \sigma_l \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\text{supp}(\sigma_j) \subset U_j \text{ e } \sum_{j=1}^l \sigma_j(x) = 1, \forall x \in \partial\Omega.$$

Dada uma função u definida na fronteira defina para cada $j = 1, \dots, l$

$$u_j(x') = \begin{cases} (\sigma_j u)(\phi^{-1}(x', 0)) & , \text{ se } x' \in (0, 1)^{N-1} = \Omega_0, \\ 0 & , \text{ se } x' \in \mathbb{R}^{N-1} - \Omega_0. \end{cases}$$

Seja $s > 0$, definimos $H^s(\partial\Omega)$ como o espaço das funções u definidas em $\partial\Omega$ tais que $u_j \in H^s(\mathbb{R}^{N-1})$, para todo $j = 1, 2, \dots, l$, que é completo em relação à norma induzida pelo produto interno

$$(u, v)_{H^s(\partial\Omega)} = \sum_{j=1}^l (u_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{N-1})}.$$

Chamaremos a restrição de uma função u à fronteira de um conjunto de traço de u e denotaremos por $\gamma_0 u$. Devido à pouca regularidade da fronteira do conjunto tratemos da definição do traço de funções de $H^1(\Omega)$. No caso em que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ definimos $\gamma_0 u$ como sendo exatamente a restrição de u à fronteira, $u|_{\partial\Omega}$, que está bem definida. O próximo passo é o seguinte resultado.

Proposição 1.23. *Seja $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Existe uma constante positiva independente de u tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja a proposição 2.7.1 do livro de Medeiros e Miranda [10]. ■

Decorre da proposição 1.23 que tomando $C^\infty(\overline{\Omega})$ como subespaço de $H^1(\Omega)$ temos que a transformação linear

$$\gamma_0 : C^\infty(\overline{\Omega}) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$$

é contínua. Como $C^\infty(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$ (por causa do teorema de extensão 1.2), é resultado conhecido da análise funcional que γ_0 pode ser estendida a $H^1(\Omega)$ (teorema 2.7–11 do livro de Kreyszig [21]). A extensão, que denotaremos ainda por γ_0 ,

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$$

é uma transformação linear contínua e, dada $u \in H^1(\Omega)$,

$$\gamma_0 u = \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_0 u_k,$$

onde (u_k) é uma sequência em $C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$.

Pode-se mostrar ainda o seguinte.

Teorema 1.3. *A transformação linear contínua*

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$$

é sobrejetiva e possui uma inversa à direita linear contínua, isto é, dada $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ temos que existe $u_g \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u_g = g$ e

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Além disso $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Consulte a seção 2.7 sobre teoremas de traço do livro de Medeiros e Miranda [10]. ■

O teorema é útil para tratar de problemas de valores de contorno como, por exemplo, encontrar a solução $u \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \in H^{-1}(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} &= g \in H^{1/2}(\partial\Omega). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Temos que existe $u_g \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0 u_g = g$ e

$$\|u_g\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)},$$

então podemos reescrever o problema como encontrar a solução $u_0 \in H^1(\Omega)$ de

$$\begin{aligned} -\Delta(u_0 - u_g) &= f \in H^{-1}(\Omega) \\ u_0|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Na forma variacional, procuramos $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(\nabla u_0, \nabla v) = \langle f, v \rangle + (\nabla u_g, \nabla v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Temos que esse problema tem solução única e podemos verificar substituindo $v = u_0$ que

$$\|u_0\|_{H^1(\Omega)} \leq C(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_g\|_{H^1(\Omega)}).$$

Portanto, além da existência e unicidade de solução para o problema (1.16) obtemos a continuidade da solução em relação aos dados do problema. De fato,

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^1(\Omega)} &= \|u_0 + u_g\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|u_g\|_{H^1(\Omega)}) + \|u_g\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C(\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}). \end{aligned}$$

De maneira mais geral, dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, temos que o traço de u , $\gamma_0 u$, pertence ao espaço $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$. Veja o teorema 1.5 do livro de Girault e Raviart [15].

1.5 Espaços de Bochner

Nesta seção estamos interessados nos espaços das funções integráveis definidas em um intervalo da reta e assumindo valores em espaços de Banach. Estes espaços são conhecidos como espaços de Bochner e são muito úteis no tratamento de problemas de evolução, isto é, equações diferenciais parciais com dependência no tempo.

Consideraremos funções definidas em um espaço de medida (X, \mathbb{X}, μ) assumindo valores em um espaço de Banach Y e faremos uso das funções simples para definir a integral, como na seção 1.2. Analogamente à definição 1.15, uma função simples é uma função que assume apenas uma quantidade finita de valores distintos no espaço de Banach Y e é da forma

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m y_j \chi_{A_j}, \quad y_j \in Y, \quad (1.17)$$

com A_j mensurável, para todo j , e $A_i \cap A_j = \emptyset$, se $i \neq j$.

Definição 1.21 (Funções fraca e fortemente mensuráveis). *Seja (X, \mathbb{X}, μ) um espaço de medida e u uma função definida em X assumindo valores em um espaço de Banach Y . A função u é dita fracamente mensurável se, para cada $f \in Y'$, a função real dada por $x \mapsto f(u(x))$ é mensurável.*

A função u é dita fortemente mensurável se existe uma sequência de funções simples que converge qtp em X para u na topologia forte de Y , isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|u(x) - \varphi_k(x)\|_Y = 0 \text{ qtp em } X.$$

□

Definição 1.22 (Funções separáveis e quase separáveis). Uma função $u : X \longrightarrow Y$ é dita separável se a sua imagem, $\{u(x) \mid x \in X\}$, é separável.

A função u é dita quase separável se existe um conjunto mensurável de medida nula A_0 tal que $\{u(x) \mid x \in X - A_0\}$ é separável.

□

Proposição 1.24. Uma função u definida em X e assumindo valores em um espaço de Banach Y é fortemente mensurável se, e somente se, é fracamente mensurável e quase separável.

Demonstração. Veja a seção 4 do capítulo 5 do livro de Yosida [26].

■

Para uma função simples com a representação (1.17), a integral é definida como

$$\int_X \varphi \, d\mu = \sum_{j=1}^m y_j \mu(A_j).$$

Definamos a integral para funções Bochner integráveis.

Definição 1.23 (Funções Bochner integráveis). Diz-se que uma função $u : X \longrightarrow Y$ é Bochner integrável se é fortemente mensurável, isto é, existe uma sequência $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ como na definição 1.21, e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \|u - \varphi_k\|_Y \, d\mu = 0.$$

□

Neste caso,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_X \varphi_k d\mu - \int_X \varphi_l d\mu \right\|_Y &= \left\| \int_X \varphi_k - \varphi_l d\mu \right\|_Y \\
&= \left\| \sum_{j=1}^m v_j \mu(B_j) \right\|_Y \\
&\leq \sum_{j=1}^m \|v_j\|_Y \mu(B_j) \\
&= \int_X \sum_{j=1}^m \|v_j\|_Y \chi_{B_j} d\mu \\
&= \int_X \|\varphi_k - \varphi_l\|_Y d\mu \\
&\leq \int_X \|u - \varphi_k\|_Y d\mu + \int_X \|u - \varphi_l\|_Y d\mu,
\end{aligned}$$

onde $\sum_{j=1}^m v_j \chi_{B_j}$ é a representação da função simples $\varphi_k - \varphi_l$. Isto é, a sequência $\left(\int_X \varphi_k d\mu \right)_{k \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy no espaço de Banach Y .

Portanto, a sequência $\left(\int_X \varphi_k d\mu \right)_{k \in \mathbb{N}}$ converge fortemente em Y e definimos a integral de uma função Bochner integrável u como

$$\int_X u d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi_k d\mu.$$

Também segue das contas acima que este limite não depende da sequência de funções simples que aproxima a função u .

Proposição 1.25. *Seja $u : X \rightarrow Y$ uma função fortemente mensurável, onde Y é um espaço de Banach. Tem-se que u é Bochner integrável se, e somente se, a função real $x \mapsto \|u(x)\|_Y$ é integrável. Além disso, se u é Bochner integrável então*

$$\left\| \int_X u d\mu \right\|_Y \leq \int_X \|u\|_Y d\mu.$$

Demonstração. Veja a seção 5 do capítulo 5 do livro de Yosida [26]. ■

Proposição 1.26. *Sejam W e Y espaços de Banach e $T : W \rightarrow Y$ uma transformação linear contínua. Se $u : X \rightarrow W$ é uma função Bochner integrável então $Tu : X \rightarrow Y$ é Bochner integrável e*

$$\int_X Tu d\mu = T \int_X u d\mu.$$

Demonstração. Veja a seção 5 do capítulo 5 do livro de Yosida [26]. ■

Proposição 1.27. *Sejam W e Y espaços de Banach e $F : W \longrightarrow Y$ uma função contínua. Se $u : X \longrightarrow W$ é uma função fortemente mensurável então $F(u) : X \longrightarrow Y$ é fortemente mensurável.*

Demonstração. Se u é fortemente mensurável então existe uma sequência de funções simples (φ_k) tal que

$$\varphi_k(x) \longrightarrow u(x) \text{ qtp}$$

na topologia forte de W . Como F é contínua, temos que

$$F(\varphi_k(x)) \longrightarrow F(u(x)) \text{ qtp}$$

na topologia forte de Y . Basta mostrar que $F\varphi_k$ é função simples. De fato, seja

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m w_j \chi_{A_j}(x)$$

uma função simples, logo,

$$F(\varphi(x)) = \sum_{j=1}^m F(w_j) \chi_{A_j}(x) + F(0) \chi_{A_0},$$

onde $A_0 = X - \bigcup_{j=1}^m A_j$.

Portanto, $(F(\varphi_k))$ é uma sequência de funções simples tal que

$$F(\varphi_k(x)) \longrightarrow F(u(x)) \text{ qtp}$$

na topologia forte de Y , isto é, $F(u)$ é fortemente mensurável. ■

Voltamo-nos para o caso em que $X = (a, b)$ é um intervalo qualquer de números reais, \mathbb{X} é a σ -álgebra de Lebesgue sobre os reais e μ é a medida de Lebesgue. Pela proposição 1.25 temos que se $u : (a, b) \longrightarrow Y$ é Bochner integrável então $\|u\|_Y$ é integrável. Analogamente às funções integráveis da seção 1.2, o conjunto das funções Bochner integráveis é um espaço vetorial e a função

$$u \mapsto \int_a^b \|u(t)\|_Y \, dt,$$

onde dt denota a medida de Lebesgue em \mathbb{R} , é uma seminorma. Também vale a seguinte proposição, que decorre diretamente da proposição 1.14.

Proposição 1.28. *Seja $u : (a, b) \longrightarrow Y$ uma função Bochner integrável. Tem-se que $u(t) = 0$ qtp em (a, b) se, e somente se,*

$$\int_a^b \|u(t)\|_Y \, dt = 0.$$

Demonstração. De fato,

$$\int_a^b \|u(t)\|_Y \, dt = 0 \iff \|u(t)\|_Y = 0 \text{ qtp} \iff u(t) = 0 \text{ qtp.}$$

■

Considere a relação de equivalência “ \sim ” sobre funções definidas em (a, b) assumindo valores em um espaço de Banach e fortemente mensuráveis dada por

$$f \sim g \iff f = g \text{ qtp em } (a, b).$$

Podemos definir o espaço das funções integráveis como sendo o quociente

$$L^1(a, b; Y) = \left\{ u : (a, b) \longrightarrow Y \text{ fortemente mensurável} \mid \int_a^b \|u(t)\|_Y \, dt < \infty \right\} / \sim,$$

que é um espaço normado com a norma

$$\|u\|_{L^1(a, b; Y)} = \int_a^b \|u(t)\|_Y \, dt.$$

De maneira mais geral, para $p \in [1, \infty)$, definimos o espaço das funções p -integráveis por

$$L^p(a, b; Y) = \left\{ u : (a, b) \longrightarrow Y \text{ fortemente mensurável} \mid \int_a^b \|u(t)\|_Y^p \, dt < \infty \right\} / \sim$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{L^p(a, b; Y)} = \left(\int_a^b \|u(t)\|_Y^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Para $p = \infty$ definimos

$$L^\infty(a, b; Y) = \left\{ u : (a, b) \longrightarrow Y \text{ fortemente mensurável} \mid \sup_{t \in (a, b)} \text{ess} \|u(t)\|_Y < \infty \right\} / \sim$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(a, b; Y)} = \sup_{t \in (a, b)} \text{ess} \|u(t)\|_Y.$$

Se $p = 2$ e Y é um espaço de Hilbert então a norma $\|\cdot\|_{L^2(a, b; Y)}$ provém do produto interno

$$(u, v)_{L^2(a, b; Y)} = \int_a^b (u(t), v(t))_Y \, dt, \quad \forall u, v \in L^2(a, b; Y).$$

Em particular, os espaços $L^p(0, T; L^p(\Omega))$ podem ser identificados aos espaços $L^p(\Omega \times (0, T))$ pelo teorema de Fubini.

Os espaços $L^p(a, b; Y)$, equipados com as respectivas normas $\|\cdot\|_{L^p(a, b; Y)}$ são espaços de Banach. Em particular, se Y é um espaço de Hilbert então $L^2(a, b; Y)$ é um espaço de Hilbert.

Podemos demonstrar que se Y é separável então $L^p(a, b; Y)$ é separável para $p \in [1, \infty)$. A reflexibilidade e a caracterização dos duais dos espaços de Bochner são assuntos mais delicados.

Considere $p, q \in (1, \infty)$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Gostaríamos de identificar o dual de um espaço $L^p(a, b; Y)$ com o espaço $L^q(a, b; Y')$. Isso é possível se Y é um espaço de Banach reflexivo. Se Y é um espaço de Banach reflexivo então cada funcional $f \in (L^p(a, b; Y))'$ pode ser identificado a uma função $u \in L^q(a, b; Y')$ por

$$\langle f, v \rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle \, dt,$$

sendo $\|f\|_{(L^p(a,b;Y))'} = \|u\|_{L^q(a,b;Y')}$. Com esta identificação podemos mostrar também que se Y é reflexivo então $L^p(a,b;Y)$ é reflexivo, para $p \in (1, \infty)$.

Pode-se mostrar também que se Y é um espaço de Banach reflexivo então cada funcional $f \in (L^1(a,b;Y))'$ pode ser identificado a uma função $u \in L^\infty(a,b;Y')$ por

$$\langle f, v \rangle = \int_a^b \langle u(t), v(t) \rangle dt,$$

sendo $\|f\|_{(L^1(a,b;Y))'} = \|u\|_{L^\infty(a,b;Y')}$, isto é, identifica-se o dual de $L^1(a,b;Y)$ com o espaço $L^\infty(a,b;Y')$.

No caso das funções reais definimos o espaço das distribuições em (a,b) , $\mathcal{D}'((a,b))$, como o espaço formado pelos funcionais lineares contínuos em $\mathcal{D}((a,b))$. De maneira mais geral, definimos o espaço das distribuições a valores vetoriais, $\mathcal{D}'((a,b);Y)$, como o espaço formado pelas transformações lineares contínuas de $\mathcal{D}((a,b))$ em Y .

Analogamente ao caso real, toda função $f \in L^1_{loc}(a,b;Y)$ define uma distribuição vetorial por

$$\phi \mapsto \int_a^b f(t)\phi(t) dt, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}((a,b)).$$

Também podemos falar da derivada de uma distribuição, dada $u \in \mathcal{D}'(a,b;Y)$, defina $u' \in \mathcal{D}'(a,b;Y)$ por

$$\langle u', \phi \rangle = -\langle u, \phi' \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}((a,b)).$$

Lema 1.6. *Seja Y um espaço de Banach e sejam u e g funções de $L^1(a,b;Y)$. São equivalentes*

1. *u é qtp igual a uma primitiva de g , isto é,*

$$u(t) = \xi + \int_a^t g(s) ds \text{ qtp em } [a,b];$$

2. *Para cada função teste $\phi \in C_c^\infty(a,b;Y)$,*

$$\int_a^b u(t)\phi'(t)dt = - \int_a^b g(t)\phi(t)dt;$$

3. *Para cada $\eta \in Y'$,*

$$\int_a^b \langle u(t), \eta \rangle \phi'(t)dt = - \int_a^b \langle g(t), \eta \rangle \phi(t)dt, \quad \forall \phi \in C_c^\infty((a,b)).$$

Além disso, se uma das condições acima é satisfeita então a função u é qtp igual a uma função de $C(a,b;Y)$, isto é, u possui uma representante contínua.

Demonstração. Veja o lema 1.1 do capítulo 3 do livro de Temam [25]. ■

Lema 1.7. *Sejam X e Y espaços de Hilbert tais que*

$$X \subset Y \subset X',$$

sendo as inclusões contínuas. Se $u \in L^2(0, T; X)$ e $u' \in L^2(0, T; X')$ então u é qtp igual a uma função contínua de $[0, T]$ em Y , isto é, $u \in C(0, T; Y)$. Além disso,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_Y = 2 \langle u'(t), u(t) \rangle.$$

Demonstração. Veja o lema 1.2, na seção 1 do capítulo 3 do livro de Temam [25]. ■

Para passar ao limite nos termos não lineares das equações são utilizados resultados de compacidade do tipo Albin-Lions.

Sejam B_0 , B e B_1 espaços de Banach com

$$B_0 \xhookrightarrow{c} B \hookrightarrow B_1. \quad (1.18)$$

Defina, para $1 \leq p_0 \leq \infty$ e $1 \leq p_1 \leq \infty$, o espaço

$$W(p_0, p_1) = \left\{ v \in L^{p_0}(0, T; B_0) \mid \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0, T; B_1) \right\} \quad (1.19)$$

equipado com a norma

$$\|v\|_{W(p_0, p_1)} = \|v\|_{L^{p_0}(0, T; B_0)} + \left\| \frac{dv}{dt} \right\|_{L^{p_1}(0, T; B_1)}.$$

Tem-se que $W(p_0, p_1)$ é um espaço de Banach e que $W(p_0, p_1) \subset L^{p_0}(0, T; B_0)$ com imersão contínua. Um resultado clássico de Albin é

Teorema 1.4. *Sejam $p_0, p_1 \in (1, \infty)$ e B_0 , B e B_1 espaços de Banach, com B_0 e B_1 reflexivos satisfazendo (1.18). Então a imersão*

$$W(p_0, p_1) \subset L^{p_0}(0, T; B)$$

é compacta.

Demonstração. Veja o teorema 2.1 do capítulo 3 do livro de Temam [25]. ■

Existe um resultado mais geral para espaços de Banach B_0 , B e B_1 satisfazendo (1.18) e tais que existem $M > 0$ e $\theta \in (0, 1)$ tais que

$$\|v\|_B \leq M \|v\|_{B_0}^{1-\theta} \|v\|_{B_1}^\theta, \quad \forall v \in B_0. \quad (1.20)$$

Teorema 1.5. *Sejam B_0 , B e B_1 espaços de Banach satisfazendo (1.18) e (1.20). Para $1 \leq p_0 \leq \infty$ e $1 \leq p_1 \leq \infty$,*

1. se $\theta(1 - 1/p_1) \leq (1 - \theta)/p_0$ então vale a imersão compacta

$$W(p_0, p_1) \subset L^p(0, T; B), \quad \forall p < p_*,$$

onde $1/p_ = (1 - \theta)/p_0 - \theta(1 - 1/p_1)$;*

2. se $\theta(1 - 1/p_1) > (1 - \theta)/p_0$ então a imersão

$$W(p_0, p_1) \subset C(0, T; B)$$

é compacta.

Demonstração. Veja o corolário 8 do artigo de Jacques Simon [24].

■

Capítulo 2

O MODELO SIMPLIFICADO DE ERICKSEN-LESLIE

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um polígono ($n = 2$) ou um poliedro ($n = 3$) aberto, conexo e limitado e seja $T > 0$. Considere as funções $u : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$, representando a velocidade do fluido, $d : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^n$, representando o vetor diretor, e $p : \Omega \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$, representando a pressão. Sejam ν , λ e γ constantes positivas.

Seja

$$\nabla d \odot \nabla d = (\nabla d)^T \nabla d.$$

O modelo de Ericksen-Leslie simplificado é

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2.2)$$

$$|d| = 1, \quad \partial_t d + u \cdot \nabla d - \gamma \Delta d - \gamma |\nabla d|^2 d = 0, \quad (2.3)$$

com as condições iniciais e de contorno

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \nabla \cdot u_0(x) = 0 \text{ e } d(x, 0) = d_0(x) \quad (2.4)$$

$$u(x, t) = 0, \quad d(x, t) = l(x, t), \text{ para } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \quad (2.5)$$

satisfazendo a condição de compatibilidade $l(x, 0) = d_0(x)$ em $\partial\Omega$. A condição de $|d| = 1$ no modelo de Ericksen-Leslie simplificado é difícil de tratar tanto do ponto de vista teórico quanto numérico [13], por isso, utiliza-se uma versão penalizada deste modelo, com

$$|d| \leq 1, \quad \partial_t d + u \cdot \nabla d - \gamma(\Delta d - f_\varepsilon(d)) = 0 \quad (2.6)$$

no lugar de (2.3), onde $f_\varepsilon = \varepsilon^{-2}(|d|^2 - 1)d$. Note que f_ε é tal que

$$f_\varepsilon(d) = \nabla_d F_\varepsilon(d).$$

onde

$$F_\varepsilon(d) = \frac{1}{4\varepsilon^2}(|d|^2 - 1)^2.$$

E, como também já foi mencionado, o número $\varepsilon > 0$ é um parâmetro fixo de penalização.

2.1 Existência de Solução para o Modelo Penalizado

Estuda-se o problema

$$\partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) = 0 \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2.8)$$

$$|d| \leq 1, \quad \partial_t d + u \cdot \nabla d - \gamma(\Delta d - f_\varepsilon(d)) = 0, \quad (2.9)$$

com

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \nabla \cdot u_0(x) = 0 \text{ e } d(x, 0) = d_0(x) \quad (2.10)$$

$$u(x, t) = 0, \quad d(x, t) = l(x, t), \text{ para } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.11)$$

Para tratar a condição de contorno não homogênea e dependente do tempo sobre d definimos a função \tilde{d} como a solução de

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{d}(t) &= 0 \\ \tilde{d}(t) \Big|_{\partial\Omega} &= \frac{l(t)}{\gamma} \end{aligned} \quad (2.12)$$

e $\hat{d} = d - \gamma \tilde{d}$. Sobre o problema (2.12) temos o seguinte resultado.

Teorema 2.1. *1. Seja Ω um domínio localmente Lipschitz em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Se $f = 0$ e $g \in H^1(\partial\Omega)$ então $\tilde{d} \in H^{3/2}(\Omega)$ com dependência contínua em g .*

2. Seja Ω um poliedro localmente Lipschitz em \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Se $f \in L^{3/2}(\Omega)$ e $g \in H^1(\partial\Omega)$ então $\tilde{d} \in H^{3/2}(\Omega)$ com dependência contínua em f e g .

Observação 2.1. Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 . Se Ω é convexo, $f \in L^2(\Omega)$ e $g = 0$ então $\tilde{d} \in H^2(\Omega)$. E se Ω é de classe C^2 , $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in H^{3/2}(\Omega)$ então $\tilde{d} \in H^2(\Omega)$. Além disso, se Ω é um polígono (em \mathbb{R}^2) localmente Lipschitz, $f \in L^2(\Omega)$ e $g = 0$ então $\tilde{d} \in H^2(\Omega)$. Em todos os casos \tilde{d} depende continuamente dos dados do problema, veja o livro de Grisvard [16].

□

O teorema 2.1 pode ser encontrado no artigo de Girault e Guillén-González [13] e implica que se $l \in H^1(0, T; H^1(\partial\Omega))$ então $\tilde{d} \in H^1(0, T; H^{3/2}(\Omega))$ (por causa da equação que \tilde{d} satisfaz e por causa da equação que $\partial_t \tilde{d}$ satisfaz). Também segue deste teorema que se $\Delta d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então $\hat{d} \in L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$ é solução de

$$\begin{aligned} \Delta \hat{d}(t) &= \Delta d(t) \\ \hat{d}(t) \Big|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Note que o problema de encontrar d é equivalente ao de encontrar \hat{d} , uma vez que \tilde{d} é conhecida. A vantagem do problema de encontrar \hat{d} é que $\hat{d}(t) \Big|_{\partial\Omega} = 0$, para todo $t \in [0, T]$.

Vejamos agora que tipo de solução procuraremos para (2.7)-(2.11). Começaremos por obter, ainda que formalmente, uma desigualdade que será muito utilizada no decorrer do trabalho.

Multiplique (2.7) por u e integre sobre Ω :

$$\begin{aligned} & (\partial_t u, u) + (u \cdot \nabla u, u) - \nu (\Delta u, u) + \\ & + (\nabla p, u) + \lambda (\nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d), u) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Multiplique (2.9) por $-\Delta \hat{d}$ e integre sobre Ω :

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t \hat{d}, -\Delta \hat{d} \right) + \left(u \cdot \nabla d, -\Delta \hat{d} \right) + \\ & + \gamma \left\| \Delta \hat{d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \gamma \left(\partial_t \tilde{d}, -\Delta \hat{d} \right) - \gamma \left(f_\varepsilon(d), -\Delta \hat{d} \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Como $\nabla \cdot u = 0$, $u(x, t) = 0$ em $\partial\Omega \times (0, T)$ e

$$\nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) = \nabla \left(\frac{|\nabla d|^2}{2} \right) + (\nabla d)^T \Delta \hat{d},$$

há algumas simplificações que podemos fazer em (2.14) e (2.15). Pelo lema 1.3 temos que

$$(u \cdot \nabla u, u) = b(u, u, u) = 0.$$

Também vale que

$$\begin{aligned} (u, \nabla p) &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} u_i D_i p dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (D_i u_i) p dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot u p dx = 0. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\left(u, \nabla \left(\frac{|\nabla d|^2}{2} \right) \right) = 0.$$

Além disso, faça

$$(\partial_t u, u) = \frac{1}{2} \partial_t \int_{\Omega} |u|^2 dx$$

e $(\Delta u, u) = -(\nabla u, \nabla u)$.

Então, após as simplificações, (2.14) se torna

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \left(u, (\nabla d)^T \Delta \hat{d} \right) = 0 \quad (2.16)$$

e (2.15) se torna

$$\begin{aligned} & \left(\partial_t \hat{d}, -\Delta \hat{d} \right) + \left(u \cdot \nabla d, -\Delta \hat{d} \right) + \\ & + \gamma \left\| \Delta \hat{d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \gamma \left(\partial_t \tilde{d}, -\Delta \hat{d} \right) - \gamma \left(f_\varepsilon(d), -\Delta \hat{d} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Depois de manipular $\left(\partial_t \hat{d}, -\Delta \hat{d} \right)$ obtemos de (2.16) somada a λ vezes (2.17) a relação

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \left\| \nabla \hat{d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & + \lambda \gamma \left\| \Delta \hat{d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 = \lambda \gamma \left(\partial_t \tilde{d}, -\Delta \hat{d} \right) - \lambda \gamma \left(f_\varepsilon(d), -\Delta \hat{d} \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Young obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \left\| \nabla \hat{d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2\nu \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & + \lambda \gamma \left\| \Delta \hat{d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lambda \gamma \left\| \partial_t \tilde{d} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \gamma \|f_\varepsilon(d)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

A desigualdade (2.19), como veremos posteriormente, sugere que podemos obter soluções $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ e $d \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$.

Inicialmente, procuramos soluções fracas para (2.7)-(2.9). Suponha que as funções u , p e d são soluções clássicas de (2.7)-(2.9), multiplicando (2.7) por $v \in \mathcal{V}$, (2.9) por $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando em Ω obtemos

$$\left(\partial_t u, v \right) + \left(u, v \right) + b(u, u, v) + \left((\nabla d)^T \Delta d, v \right) = 0, \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

e

$$\left(\partial_t d, \varphi \right) + \left(u \cdot \nabla d, \varphi \right) + \left(-\Delta d + f_\varepsilon(d), \varphi \right) = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como mencionado anteriormente, se $l \in H^1(0, T; H^1(\partial\Omega))$ e $\Delta d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então $d \in L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$.

Logo, por continuidade, as equações acima podem ser estendidas para toda $v \in V$ e toda $\varphi \in L^2(\Omega)$.

Assim, como

$$\left(\partial_t u, v \right) = \frac{d}{dt} \left(u, v \right) \text{ e } \left(\partial_t d, \varphi \right) = \frac{d}{dt} \left(d, \varphi \right),$$

podemos considerar a seguinte formulação.

Problema 1. Encontrar u e d tais que

$$u \in L^2(0, T; V), \quad (2.20)$$

$$d \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \Delta d \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left(u, v \right) + \nu \left(u, v \right) + b(u, u, v) + \lambda \left((\nabla d)^T \Delta d, v \right) = 0, \quad \forall v \in V, \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left(d, \varphi \right) + \left(u \cdot \nabla d, \varphi \right) + \gamma \left(-\Delta d + f_\varepsilon(d), \varphi \right) = 0, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega), \quad (2.23)$$

$$u(0) = u_0 \in H, \quad d(0) = d_0 \in H^1(\Omega) \text{ e } d|_{\partial\Omega} = l \in H^1(0, T; H^1(\partial\Omega)). \quad (2.24)$$

□

Por outro lado, note que se u e d são soluções de (2.20)-(2.23) então

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle u, v \rangle &= \langle -\nu \mathcal{A}u - \mathcal{B}u - \lambda \mathcal{C}d, v \rangle, \quad \forall v \in V, \\ \frac{d}{dt}\langle d, \varphi \rangle &= \langle -u \cdot \nabla d + \Delta d - f_\varepsilon(d), \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega),\end{aligned}$$

onde $\langle \mathcal{A}u, v \rangle = ((u, v))$, $\langle \mathcal{B}u, v \rangle = b(u, u, v)$ e $\langle \mathcal{C}d, v \rangle = ((\nabla d)^T \Delta d, v)$.

Proposição 2.1. *Se $u \in L^2(0, T; V)$, $d \in L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$ e $\Delta d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então $\mathcal{A}u \in L^2(0, T; V')$, $\mathcal{B}u \in L^1(0, T; V')$ e $\mathcal{C}d \in L^1(0, T; V')$.*

Demonstração. Para \mathcal{A} , temos que

$$|\langle \mathcal{A}u, v \rangle| = |((u, v))| \leq \|u\|_V \|v\|_V, \quad \forall v \in V,$$

isto é,

$$\|\mathcal{A}u\|_{V'} \leq \|u\|_V.$$

Decorre desta desigualdade que $\mathcal{A} : V \longrightarrow V'$ que faz $u \mapsto \mathcal{A}u$ é uma transformação linear contínua e que $\mathcal{A}u \in L^2(0, T; V')$.

Para \mathcal{B} , temos que

$$|\langle \mathcal{B}u, v \rangle| = |b(u, u, v)| = |b(u, v, u)| \leq C \|u\|_V^2 \|v\|_V,$$

isto é,

$$\|\mathcal{B}u\|_{V'} \leq C \|u\|_V^2.$$

Logo, $\mathcal{B} : V \longrightarrow V'$ que faz $u \mapsto \mathcal{B}u$ é uma função contínua, de onde temos que é fortemente mensurável, pela proposição 1.27, e $\mathcal{B}u \in L^1(0, T; V')$.

Finalmente, para \mathcal{C} , temos que

$$|\langle \mathcal{C}d, v \rangle| = \left| ((\nabla d)^T \Delta d, v) \right| \leq C \|d\|_{H^{3/2}(\Omega)} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_V, \quad \forall v \in V,$$

isto é

$$\|\mathcal{C}d\|_{V'} \leq C \|d\|_{H^{3/2}(\Omega)} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}.$$

Daí segue, analogamente à função $\mathcal{B}u$, que $\mathcal{C}d \in L^1(0, T; V')$, como queríamos. ■

Como

$$\begin{aligned}\nu \mathcal{A}u + \mathcal{B}u + \lambda \mathcal{C}d &\in L^1(0, T; V'), \\ u \cdot \nabla d + \gamma(-\Delta d + f_\varepsilon(d)) &\in L^1(0, T; L^2(\Omega)),\end{aligned}$$

V é reflexivo e $L^2(\Omega)$ é identificado com seu dual, estamos na condição 3 do lema 1.6, logo,

$$\partial_t u \in L^1(0, T; V'),$$

$$\partial_t u + \nu \mathcal{A}u + \mathcal{B}u + \lambda \mathcal{C}d = 0,$$

$$\partial_t d \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$$

e

$$\partial_t d + u \cdot \nabla d + \gamma(-\Delta d + f_\varepsilon(d)) = 0.$$

Além disso, ainda pelo lema 1.6, temos que $u \in C(0, T; V')$ e $d \in C(0, T; L^2(\Omega))$, o que dá sentido às condições iniciais em (2.24).

Uma formulação alternativa é a seguinte.

Problema 2. Encontrar u e d tais que

$$u \in L^2(0, T; V), \quad \partial_t u \in L^2(0, T; V'), \quad (2.25)$$

$$d \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \partial_t d \in L^1(0, T; L^2(\Omega)), \quad \Delta d \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.26)$$

$$\partial_t u + \nu \mathcal{A}u + \mathcal{B}u + \lambda \mathcal{C}d = 0 \text{ qtp em } (0, T), \quad (2.27)$$

$$\partial_t d + u \cdot \nabla d + \gamma(-\Delta d + f_\varepsilon(d)) = 0 \text{ qtp em } (0, T), \quad (2.28)$$

$$u(0) = u_0 \in H, \quad d(0) = d_0 \in H^1(\Omega) \text{ e } d\Big|_{\partial\Omega} = l \in H^1(0, T; H^1(\partial\Omega)). \quad (2.29)$$

□

Os problemas 1 e 2 são equivalentes.

Note que o sistema de equações para d é satisfeito qtp em $\Omega \times (0, T)$. Procuram-se, então, soluções “semi-fortes”, como definido a seguir.

Definição 2.1 (Solução semi-forte). *Sejam $l \in H^1(0, T; H^1(\partial\Omega))$ e $(u_0, d_0) \in H \times H^1(\Omega)$ tais que*

$$l(0) = d_0\Big|_{\partial\Omega}.$$

Um par (u, d) é chamado de solução semi-forte em $(0, T)$ de (2.7)-(2.11) se

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

$$d \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad \Delta d \in L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad d\Big|_{\partial\Omega \times (0, T)} = l,$$

$$\partial_t (u, v) + \nu((u, v)) + (u \cdot \nabla u, v) + \lambda \left((\nabla d)^T \Delta d, v \right) = 0, \quad \forall v \in V,$$

$$\partial_t d + u \cdot \nabla d + \gamma(f_\varepsilon(d) - \Delta d) = 0, \text{ qtp em } \Omega \times (0, T),$$

$$u(0) = u_0 \text{ e } d(0) = d_0.$$

□

Observação 2.2. Uma solução semi-forte é uma solução de (2.7)-(2.11) no sentido que se u e d satisfazem

$$\partial_t (u, v) + \nu((u, v)) + (u \cdot \nabla u, v) + \lambda \left((\nabla d)^T \Delta d, v \right) = 0, \quad \forall v \in V,$$

então podemos recuperar a pressão utilizando o lema de De Rham (veja o capítulo 1 do livro de Temam [25]) ou o fato de que $(H_0^1(\Omega), L_0^2(\Omega))$ satisfaz a condição de *inf-sup* (veja a subseção sobre a condição de *inf-sup* no próximo capítulo). Obtemos assim que existe uma função $\tilde{p} \in H^{-1}(0, T; L^2(\Omega))$, o dual de $H^1(0, T; L^2(\Omega))$, satisfazendo

$$\partial_t (u, v) + \nu((u, v)) + (u \cdot \nabla u, v) - (p, \nabla \cdot v) + \lambda \left((\nabla d)^T \Delta d, v \right) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

. Fazendo

$$p = \tilde{p} - \frac{1}{2} |\nabla d|^2$$

recuperamos (2.7).

□

Com a regularidade da solução semi-forte, a condição $|d(x, t)| \leq 1$ é obtida *qtp* pelo seguinte princípio do máximo.

Lema 2.1. Dada $u \in L^2(0, T; V)$, se $|l(x)| \leq 1$ *qtp* em $\partial\Omega$, $|d_0| \leq 1$ *qtp* em Ω e $d \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ é solução de

$$\partial_t d + u \cdot \nabla d - \gamma(\Delta d - f_\varepsilon(d)) = 0 \quad \text{qtp}, \quad (2.30)$$

com $d(0) = d_0$ e $\Delta d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então d verifica $|d(x, t)| \leq 1$ *qtp* em $(0, T) \times \Omega$.

Demonstração. Tomando o produto interno de (2.30) por d e usando que $\Delta(d \cdot d) = 2\Delta d \cdot d + 2\nabla d \cdot \nabla d$ obtemos

$$\partial_t |d|^2 + 2\gamma f_\varepsilon(d) \cdot d - \gamma \Delta |d|^2 + u \cdot \nabla(|d|^2) \leq 0.$$

Como a derivada de uma função constante é zero podemos escrever

$$\partial_t (|d|^2 - 1) + 2\gamma f_\varepsilon(d) \cdot d - \gamma \Delta (|d|^2 - 1) + u \cdot \nabla (|d|^2 - 1) \leq 0. \quad (2.31)$$

Defina a função

$$\psi(d) = (|d|^2 - 1)_+,$$

onde $x_+ = x$, se $x \geq 0$, e $x_+ = 0$, se $x < 0$. Temos que $\psi(d) \in H_0^1(\Omega)$. Note que

$$\int_{\Omega} u \cdot \nabla (|d|^2 - 1) \psi(d) dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla \psi(d) \psi(d) dx = 0,$$

pelo lema 1.3, e que

$$f_\varepsilon(d) \cdot d \psi(d) \geq 0.$$

Então, tomando o produto interno de $L^2(\Omega)$ de (2.31) por $\psi(d)$, obtemos

$$\partial_t \|\psi(d)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\gamma \|\nabla \psi(d)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0,$$

ou seja, $\|\psi(d(t))\|_{L^2(\Omega)} = 0$ qtp. ■

Note que no lema 2.1 podemos trocar a função f_ε por

$$\tilde{f}_\varepsilon(d) = \begin{cases} f_\varepsilon(d) & , \text{ se } |d| \leq 1, \\ 0 & , \text{ se } |d| > 1 \end{cases} \quad (2.32)$$

e obter o mesmo princípio do máximo. Logo, decorre do lema 2.1 que, ao trocar f_ε por \tilde{f}_ε em (2.9), obtemos um sistema equivalente a (2.7)-(2.11), com a vantagem de que \tilde{f} é limitada. De fato,

$$|\tilde{f}_\varepsilon(d)| \leq \frac{1}{\varepsilon^2}, \quad \forall d \in \mathbb{R}^n. \quad (2.33)$$

Além disso, temos que

$$\tilde{F}_\varepsilon(d) = \begin{cases} F_\varepsilon(d) & , \text{ se } |d| \leq 1, \\ 0 & , \text{ se } |d| > 1 \end{cases} \quad (2.34)$$

é tal que $\tilde{f}_\varepsilon(d) = \nabla_d \tilde{F}_\varepsilon(d)$.

Com a substituição de f_ε por \tilde{f}_ε , demonstraremos a existência de solução semi-forte (definição 2.1) global para o sistema penalizado (2.7)-(2.11) quando $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 , é um polígono conexo, limitado e localmente Lipschitz (definição 1.20). Neste texto, o termo “solução global” significa que, dado $T > 0$ finito, pode-se mostrar que a solução está definida em $[0, T]$. Para tanto, utilizaremos o método de Faedo-Galerkin, isto é, discretizaremos todo o sistema (2.7)-(2.11) no espaço mantendo-o contínuo na variável temporal. As ideias são parecidas com as de [25] e [7].

Teorema 2.2. *Sejam $T > 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$ ou 3 , um polígono conexo, limitado e localmente Lipschitz. Dados $u_0 \in H$, $d_0 \in H^1(\Omega)$ e $l \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ tais que $d_0|_{\partial\Omega} = l(0)$ qtp em $\partial\Omega$, $|d_0(x)| \leq 1$ qtp em Ω e $|l(x, t)| \leq 1$ qtp em $(0, T) \times \partial\Omega$, existe um par (u, d) , solução semi-forte em $(0, T)$ do modelo penalizado (2.7)-(2.11).*

A demonstração do teorema 2.2, dividida nas subseções que seguem, será feita em três passos: solução de um problema aproximado, obtenção de estimativas a priori sobre as soluções aproximadas e suas derivadas temporais e passagem ao limite. Em geral, a passagem ao limite é simples nos termos lineares, nos termos não lineares a situação é bem mais complicada e são necessários resultados de compacidade do tipo Albin-Lion como os teoremas 1.4 e 1.5.

2.1.1 Existência de solução para o sistema penalizado aproximado

Queremos encontrar u e \hat{d} tais que $u(t) \in V$ e $\hat{d}(t) \in H_0^1(\Omega)$. Os espaços V e $H_0^1(\Omega)$ são separáveis, logo, podemos escolher $\{v_1, \dots, v_m, \dots\}$, um subconjunto de V enumerável e denso em V ,

e $\{e_1, \dots, e_m, \dots\}$, um subconjunto de $H_0^1(\Omega)$ enumerável e denso em $H_0^1(\Omega)$. Como \mathcal{V} é denso em V , tome o conjunto $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $v_j \in \mathcal{V}$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Seja V^m o subespaço de V gerado por $\{v_1, \dots, v_m\}$ e seja W^m o subespaço de $H_0^1(\Omega)$ gerado por $\{e_1, \dots, e_m\}$. Considere

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m \xi_{jm}(t) v_j \text{ e } \hat{d}_m(t) = \sum_{j=1}^m \eta_{jm}(t) e_j, \quad (2.35)$$

a discretização de (2.7)-(2.11) é a seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t (u_m, v) + \nu((u_m, v)) + (u_m \cdot \nabla u_m, v) + \\ \quad + \lambda \left((\nabla d_m)^T \Delta \hat{d}_m, v \right) = 0, \quad \forall v \in V^m \\ \partial_t (\hat{d}_m, e) + ((u_m \cdot \nabla) d_m, e) + \left(-\Delta \hat{d}_m + \tilde{f}_\varepsilon(d_m), e \right) = \\ \quad = \left(\partial_t \tilde{d}, e \right), \quad \forall e \in W^m, \end{array} \right. \quad (2.36)$$

com $u_m(0) = u_{0m}$ e $\hat{d}_m(0) = \hat{d}_{0m}$, onde $d_m = \hat{d}_m + \tilde{d}$, u_{0m} é a projeção de u_0 em V^m e \hat{d}_{0m} é a projeção de \hat{d}_0 em W^m .

Como queremos utilizar $-\Delta \hat{d}_m$ como função teste na segunda equação de (2.36), para obter uma desigualdade de energia como (2.19), devemos tomar o subconjunto denso e enumerável em $H_0^1(\Omega)$, $\{e_1, \dots, e_m, \dots\}$, como sendo o conjunto de autovalores do operador laplaciano, isto é,

$$e_j \in H_0^1(\Omega), \quad \Delta e_j \in L^2(\Omega)$$

e

$$-\Delta e_j = \lambda_j e_j.$$

Desse modo temos que

$$\Delta d_m(t) = \sum_{j=1}^m \eta_{jm}(t) \Delta e_j = \sum_{j=1}^m \eta_{jm}(t) \lambda_j e_j \in W^m.$$

Uma conta simples nos permite constatar que, em vez de verificar (2.36) para todas as funções de V^m e W^m , basta verificar (2.36) para cada elemento das bases de V^m e W^m ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t (u_m, v_j) + \nu((u_m, v_j)) + (u_m \cdot \nabla u_m, v_j) + \\ \quad + \lambda \left((\nabla d_m)^T \Delta \hat{d}_m, v_j \right) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m \\ \partial_t (\hat{d}_m, e_j) + ((u_m \cdot \nabla) d_m, e_j) + \left(-\Delta \hat{d}_m + \tilde{f}_\varepsilon(d_m), e_j \right) = \\ \quad = \left(\partial_t \tilde{d}, e_j \right), \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \right. \quad (2.37)$$

com $u_m(0) = u_{0m}$ e $\hat{d}_m(0) = \hat{d}_{0m}$. Na verdade, (2.36) e (2.37) são equivalentes. Chamaremos (2.37) de sistema aproximado.

Para cada $m \in \mathbb{N}$, obtemos de (2.37) um sistema de EDOs nas variáveis ξ_{jm} e η_{jm} . Uma vez que $\{v_1, \dots, v_m\}$ e $\{e_1, \dots, e_m\}$ são LI, as matrizes quadradas A e D com componentes $A_{ij} = (v_i, v_j)$ e $D_{ij} = (e_i, e_j)$ são inversíveis, logo, podemos colocar o sistema de EDOs (2.37) na sua forma usual

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \xi_{1m}(t) = g_1(\xi_{1,m}(t), \dots, \xi_{mm}(t), \eta_{1m}(t), \dots, \eta_{mm}(t), t) \\ \vdots \\ \partial_t \xi_{mm}(t) = g_m(\xi_{1,m}(t), \dots, \xi_{mm}(t), \eta_{1m}(t), \dots, \eta_{mm}(t), t) \\ \\ \partial_t \eta_{1m}(t) = h_1(\xi_{1,m}(t), \dots, \xi_{mm}(t), \eta_{1m}(t), \dots, \eta_{mm}(t), t) \\ \vdots \\ \partial_t \eta_{mm}(t) = h_m(\xi_{1,m}(t), \dots, \xi_{mm}(t), \eta_{1m}(t), \dots, \eta_{mm}(t), t) \\ \\ \xi_{jm}(0) = \xi_{jm}^0, \quad j = 1, \dots, m \\ \eta_{jm}(0) = \eta_{jm}^0, \quad j = 1, \dots, m, \end{array} \right. \quad (2.38)$$

onde $u_{0m} = \sum_{j=1}^m \xi_{jm}^0 v_j$ e $\hat{d}_{0m} = \sum_{j=1}^m \eta_{jm}^0 e_j$.

As funções g_1, \dots, g_m são produtos entre as variáveis $\xi_{jm}, \eta_{jm}, j = 1, \dots, m$, e as partes dependentes do tempo, que são \tilde{d} ou alguma derivada de primeira ordem de \tilde{d} ; \tilde{d} e $\nabla \tilde{d}$ são Lipschitz em relação a t , pois $\tilde{d} \in H^1(0, T; H^1(\Omega))$ (lema 1.6).

Nas funções h_1, \dots, h_m também aparecem estes termos contínuos e localmente Lipschitz, mas aparece ainda o termo relacionado a $(\partial_t \tilde{d}, v)$, que depende do tempo e tem regularidade $L^2((0, T))$. Neste caso, para garantir a existência de solução para o sistema aproximado utilizamos o resultado de existência de solução conhecido como teorema de *Carathéodory*, que pode ser encontrado no livro de Coddington e Levinson [9]. Mais precisamente, veja o teorema 1.1 do capítulo 2 do livro de Coddington e Levinson [9].

Decorre do teorema de *Carathéodory* que o sistema de EDOs (2.38) tem solução local e uniformemente contínua em $[0, \tau] \subset [0, T]$ e pode ser estendida a um intervalo maximal $[0, \tau_m] \subset [0, T]$. Logo, existe (u_m, \hat{d}_m) solução de (2.37) definida em $[0, \tau_m]$, que chamaremos de solução aproximada. Pelas estimativas a priori sobre $\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ e $\|\nabla \hat{d}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$, que serão obtidas na próxima subseção, segue que o intervalo maximal de definição das soluções aproximadas é $[0, T]$.

2.1.2 Estimativas a priori independentes de m

A regularidade das soluções aproximadas é suficiente para se obter a desigualdade de energia (2.19). Então, as soluções aproximadas (u_m, \hat{d}_m) satisfazem, para cada $m \in \mathbb{N}$, a desigualdade

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla \hat{d}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2\nu \|\nabla u_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ & + \lambda\gamma \|\Delta \hat{d}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \lambda\gamma \|\partial_t \tilde{d}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda\gamma \|\tilde{f}_\varepsilon(d_m)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Integrando (2.39) de 0 a t , com $t \in (0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned} & \|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla \hat{d}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & + \lambda\gamma \int_0^t \|\Delta \hat{d}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \lambda\gamma \int_0^t \|\partial_t \tilde{d}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & + \lambda\gamma \int_0^t \|\tilde{f}_\varepsilon(d_m(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla \hat{d}_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Como $\|\tilde{f}_\varepsilon(d_m(s))\|_{L^2(\Omega)}^2$ é limitada,

$$\int_0^t \|\partial_t \tilde{d}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \int_0^T \|\partial_t \tilde{d}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq \infty, \text{ para } t \in (0, T),$$

pois $\partial_t \tilde{d} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{0m} = u_0$ em V e $\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{d}_{0m} = \hat{d}_0$ em $H_0^1(\Omega)$, pois são projeções, temos que o lado direito de (2.40) é limitado por uma constante C independente de m .

Todos os termos do lado esquerdo de (2.40) são positivos, então, ao omitir alguns destes termos, o que sobra ainda é limitado pela constante C . Assim, segue de (2.40) que

$$\|u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla \hat{d}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C, \text{ qtp em } (0, T).$$

Desta desigualdade é possível concluir que

$$u_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H) \quad (2.41)$$

e que

$$\hat{d}_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (2.42)$$

lembrando que essas limitações são uniformes em m , isto é, não dependem de m .

Integrando (2.39) de 0 a T obtemos

$$\begin{aligned} & \|u_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla \hat{d}_m(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\nu \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \\ & + \lambda\gamma \int_0^T \|\Delta \hat{d}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq \lambda\gamma \int_0^T \|\partial_t \tilde{d}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \\ & + \lambda\gamma \int_0^T \|\tilde{f}_\varepsilon(d_m(s))\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \|u_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla \hat{d}_{0m}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pelo mesmo raciocínio aplicado a (2.40), concluímos que o lado direito de (2.43) é limitado pela mesma constante C independente de m . Novamente, ao omitir alguns termos do lado esquerdo de (2.43) obtemos

$$2\nu \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \lambda\gamma \int_0^T \|\Delta \hat{d}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq C.$$

Desta desigualdade é possível concluir que

$$u_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; V) \quad (2.44)$$

e que

$$\Delta \hat{d}_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.45)$$

sendo que, novamente, essas limitações são uniformes em m .

De (2.45) e do teorema 2.1 temos que $\hat{d}_m(t) \in H^{3/2}(\Omega)$ e

$$\|\hat{d}_m(t)\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C \|\Delta \hat{d}_m(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \tilde{C} \|\Delta \hat{d}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}, \text{ qtp em } (0, T). \quad (2.46)$$

Portanto, de (2.41), (2.42), (2.44), (2.45) e (2.46) temos que

$$u_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V), \quad (2.47)$$

$$\hat{d}_m \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega)) \quad (2.48)$$

e

$$\Delta \hat{d}_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.49)$$

uniformemente em relação a m .

2.1.3 Estimativas a priori independentes de m para as derivadas temporais

Para usar os resultados de compacidade dados pelos teoremas 1.4 e 1.5, além das limitações (2.47) e (2.48), precisamos de limitações independentes de m convenientes sobre as derivadas temporais de u_m e \hat{d}_m .

Isolando a derivada temporal na equação (2.7) obtemos

$$\langle \partial_t u_m, v \rangle = -\nu \langle \mathcal{A}u_m, v \rangle + \langle \mathcal{B}u_m, v \rangle + \lambda \langle \mathcal{C}d_m, v \rangle. \quad (2.50)$$

Como já foi mencionado na demonstração da proposição 2.1, temos que

$$\|\mathcal{A}u_m\|_{V'} \leq \|u_m\|_V,$$

$$\|\mathcal{B}u_m\|_{V'} \leq C \|u_m\|_V^2,$$

e

$$\|\mathcal{C}d_m\|_{V'} \leq C \|d_m\|_{H^{3/2}(\Omega)} \|\Delta d_m\|_{L^2(\Omega)},$$

daí, pelas limitações (2.47), (2.48) e (2.49),

$$\mathcal{A}u_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; V'), \quad (2.51)$$

$$\mathcal{B}u_m \text{ é limitada em } L^1(0, T; V'), \quad (2.52)$$

e

$$\mathcal{C}d_m \text{ é limitada em } L^1(0, T; V'). \quad (2.53)$$

Portanto, de (2.50) e das limitações (2.51), (2.52) e (2.53) concluímos que

$$\partial_t u_m \text{ é limitada em } L^1(0, T; V'). \quad (2.54)$$

Isolando agora a derivada temporal na equação (2.9) obtemos

$$\partial_t \hat{d}_m = -u \cdot \nabla d_m - \gamma \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_m) - \Delta \hat{d}_m \right) + \partial_t \tilde{d}. \quad (2.55)$$

Como $\partial_t \tilde{d} \in L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$ é fixa e a limitação de $\tilde{f}_\varepsilon(d_m) - \Delta \hat{d}_m$ em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ é conhecida, resta-nos apenas limitar $u \cdot \nabla d_m$. Infelizmente, esta limitação não pode ser feita na norma de $L^2(\Omega)$, então, teremos que ver $u_m \cdot \nabla d_m$ como uma função a valores em um espaço menos regular do que $L^2(\Omega)$. Tratemos de limitar $u_m \cdot \nabla d_m$ como função a valores em $L^{4/3}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} |u_m \cdot \nabla d_m|_{\mathbb{R}^n}^{4/3} &= \left(\sum_{i,j,k} u_{m_i} D_i d_{m_j} u_{m_k} D_k d_{m_j} \right)^{2/3} \\ &\leq \left(\sum_{i,j,k} \left[u_{m_i}^{2/3} (D_i d_{m_j})^{2/3} u_{m_k}^{2/3} (D_k d_{m_j})^{2/3} \right]^{3/2} \right)^{2/3} \\ &\leq \sum_{i,j,k} u_{m_i}^{2/3} (D_i d_{m_j})^{2/3} u_{m_k}^{2/3} (D_k d_{m_j})^{2/3}. \end{aligned}$$

Como $D_i d_{m_j} \in L^2(\Omega)$ e $u_{m_i} \in H_0^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$ temos que $(D_i d_{m_j})^{2/3} \in L^3(\Omega)$ e $(u_{m_i})^{2/3} \in L^6(\Omega)$. Daí, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\Omega} |u_m \cdot \nabla d_m|_{\mathbb{R}^n}^{4/3} dx \leq \sum_{i,j,k} \|u_{m_i}\|_{L^4(\Omega)}^{4/6} \|u_{m_k}\|_{L^4(\Omega)}^{4/6} \|D_i d_{m_j}\|_{L^2(\Omega)}^{1/3} \|D_k d_{m_j}\|_{L^2(\Omega)}^{1/3}.$$

E, como a norma de cada componente é menor do que a norma do vetor segue que

$$\int_{\Omega} |u_m \cdot \nabla d_m|_{\mathbb{R}^n}^{4/3} dx \leq C \|u_m\|_{L^4(\Omega)}^{4/3} \|\nabla d_m\|_{L^2(\Omega)}^{2/3},$$

ou ainda,

$$\left(\int_{\Omega} |u_m \cdot \nabla d_m|_{\mathbb{R}^n}^{4/3} dx \right)^{3/4} \leq C^{3/4} \|u_m\|_{L^4(\Omega)} \| \nabla d_m \|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Utilizando o lema 1.4, se $n = 2$ então

$$\|u_m \cdot \nabla d_m\|_{L^{4/3}(\Omega)} \leq 2^{1/4} C^{3/4} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u_m\|_V^{1/2} \|\nabla d_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Daí,

$$\int_0^T \|u_m \cdot \nabla d_m\|_{L^{4/3}(\Omega)}^4 dt \leq 2C^3 \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 \|\nabla d_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^2 \|u_m\|_{L^2(0,T;V)}^2.$$

Analogamente, se $n = 3$ então

$$\|u_m \cdot \nabla d_m\|_{L^{4/3}(\Omega)} \leq 2^{1/2} C^{3/4} \|u_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/4} \|u_m\|_V^{3/4} \|\nabla d_m\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}.$$

Daí,

$$\int_0^T \|u_m \cdot \nabla d_m\|_{L^{4/3}(\Omega)}^{8/3} dt \leq 2^{4/3} C^2 \|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)}^{2/3} \|\nabla d_m\|_{L^\infty(0,T;H^1(\Omega))}^{4/3} \|u_m\|_{L^2(0,T;V)}^2.$$

Portanto, pelas limitações (2.47) e (2.48) temos que

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{d}_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) + L^p(0, T; L^{4/3}(\Omega)), \\ p = 4, \text{ se } n = 2, \text{ e } p = 8/3, \text{ se } n = 3. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Mas $L^p(0, T; L^{4/3}(\Omega))$ está imerso continuamente em $L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega))$, quando $p > 2$, isto é,

$$\|u\|_{L^2(0,T;L^{4/3}(\Omega))} \leq C \|u\|_{L^p(0,T;L^{4/3}(\Omega))}, \quad \forall u \in L^p(0, T; L^{4/3}(\Omega)).$$

Logo, se $u_m \cdot \nabla d_m$ é limitada em $L^p(0, T; L^{4/3}(\Omega))$ então também é limitada em $L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega))$. Como Ω é limitado, também temos que $L^2(\Omega)$ esta imerso continuamente em $L^{4/3}(\Omega)$, isto é,

$$\|u\|_{L^{4/3}(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Então, por ser limitada em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$,

$$\left(\tilde{f}_\varepsilon(d_m) - \Delta \hat{d}_m \right) + \partial_t \tilde{d}$$

também é limitada em $L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega))$.

Portanto, conseguimos a limitação

$$\partial_t \hat{d}_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega)). \quad (2.57)$$

2.1.4 Convergência em m e passagem ao limite

Uma vez que V é um espaço de Hilbert temos que $L^2(0, T; V)$ é um espaço de Hilbert e, portanto, é reflexivo. Logo, pela limitação uniforme (2.47) e pela proposição 1.9 temos que existe uma subsequência da sequência (u_m) , que denotaremos por (u_m) , tal que

$$u_m \rightarrow u \text{ em } L^2(0, T; V) \text{ na topologia fraca.} \quad (2.58)$$

Como H é um espaço de Hilbert separável temos que H é, em particular, um espaço de Banach reflexivo e separável. Porque H é reflexivo podemos identificar $L^\infty(0, T; H)$ com o dual do espaço $L^1(0, T; H)$ e,

porque H é separável, temos que $L^1(0, T; H)$ é separável, isto é, $L^\infty(0, T; H)$ é o dual de um espaço de Banach separável. Então, segue da limitação uniforme (2.47) e da proposição 1.10 que, passando a uma subsequência de (u_m) , ainda denotada por (u_m) , se necessário,

$$u_m \rightarrow u_* \text{ em } L^\infty(0, T; H) \text{ na topologia fraca}^*. \quad (2.59)$$

Note que (2.58) significa que, fixada $v \in L^2(0, T; H)$,

$$\int_0^T (u - u_m, v) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (2.60)$$

E (2.59) significa que, fixada $v \in L^1(0, T; H)$,

$$\int_0^T (u_* - u_m, v) dt \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0. \quad (2.61)$$

Logo, de (2.60) e (2.61) temos que

$$\int_0^T (u - u_*, v) dt = 0, \quad \forall v \in L^2(0, T; H),$$

Tomando $v(t) = u(t) - u_*(t)$ temos que $u(t) = u_*(t)$, qtp em $[0, T]$, isto é, $u = u_* \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$.

Portanto, podemos dizer que existem uma subsequência da sequência (u_m) , ainda denotada por (u_m) , e $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ tais que

$$u_m \rightarrow u \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; H) \text{ e fraco em } L^2(0, T; V). \quad (2.62)$$

Além disso, de (2.47) e (2.54) temos que

$$u_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; V)$$

e

$$\partial_t u_m \text{ é limitada em } L^1(0, T; V'),$$

com as imersões contínuas

$$V \subset H \subset V'$$

e a imersão compacta $V \subset H$, isto é, (1.18) é satisfeita. Com a limitação de $\partial_t u_m$ em $L^1(0, T; V')$ não podemos utilizar o teorema 1.4, a ideia é utilizar o teorema 1.5. Neste caso, precisamos mostrar que V , H e V' satisfazem (1.20).

Pela identificação de V com um subespaço de V' dada por

$$u \mapsto \langle u, \cdot \rangle = (u, \cdot)$$

temos que

$$\|u\|_H^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (u, u) = \langle u, u \rangle \leq \|u\|_{V'} \|u\|_V,$$

ou seja,

$$\|u\|_H \leq \|u\|_V^{1/2} \|u\|_{V'}^{1/2},$$

mostrando que (1.20) é satisfeita.

Portanto, podemos utilizar o teorema 1.5 para concluir que existe uma subsequência de (u_m) que converge em $L^2(0, T; H)$ na topologia forte. Utilizando o raciocínio empregado para demonstrar que u em (2.58) e u_* em (2.59) são a mesma função pode-se mostrar que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$u_m \rightarrow u \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; H), \text{ fraco em } L^2(0, T; V) \text{ e forte em } L^2(0, T; H). \quad (2.63)$$

Analogamente à sequência (u_m) , temos que $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ é o dual de um espaço de Banach separável e $L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$ é um espaço de Hilbert e, portanto, é reflexivo. Logo, pelas limitações uniformes (2.48) e pelas proposições 1.9 e 1.10 temos que existe uma subsequência da sequência (\hat{d}_m) , ainda denotada por (\hat{d}_m) , tal que

$$\hat{d}_m \rightarrow \hat{d} \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \text{ e fraco em } L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega)). \quad (2.64)$$

Além disso, por (2.48) e (2.57) temos que

$$\hat{d}_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$$

e

$$\partial_t \hat{d}_m \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^{4/3}(\Omega)),$$

com as imersões contínuas

$$H^{3/2}(\Omega) \subset H^1(\Omega) \subset L^{4/3}(\Omega)$$

e a imersão compacta $H^{3/2}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, isto é, (1.18) é satisfeita. Temos também que $H^{3/2}(\Omega)$ e $L^{4/3}(\Omega)$ são reflexivos.

Portanto, podemos aplicar o teorema 1.4 para concluir que existe uma subsequência de (\hat{d}_m) que converge em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ na topologia forte. Logo, passando a uma subsequência, se necessário,

$$\hat{d}_m \rightarrow \hat{d} \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \text{ fraco em } L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega)) \text{ e forte em } L^2(0, T; H^1(\Omega)). \quad (2.65)$$

Por (2.49) e pela proposição 1.9 temos que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$\Delta \hat{d}_m \rightarrow D \text{ fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.66)$$

Mas, da convergência forte em (2.65), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \Delta \hat{d}_m, \psi \rangle dt &= - \int_0^T ((\hat{d}_m, \psi)) dt \longrightarrow - \int_0^T ((\hat{d}, \psi)) dt = \\ &= \int_0^T \langle \Delta \hat{d}, \psi \rangle dt, \end{aligned}$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega \times (0, T))$. Da convergência (2.66) segue que

$$\int_0^T \langle \Delta \hat{d}_m, \psi \rangle dt \longrightarrow \int_0^T \langle D, \psi \rangle dt$$

para toda $\psi \in C_c^\infty(\Omega \times (0, T))$. Logo,

$$\int_0^T \langle \Delta \hat{d}, \psi \rangle dt = \int_0^T \langle D, \psi \rangle dt, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega \times (0, T))$$

e segue do lema de Du Bois Raymond (proposição 1.18) que

$$\Delta \hat{d} = D \text{ qtp em } \Omega \times (0, T),$$

isto é,

$$\Delta \hat{d} = D.$$

Finalmente, podemos concluir que, passando a uma subsequência, se necessário,

$$\Delta \hat{d}_m \rightharpoonup \Delta \hat{d} \text{ fraco em } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.67)$$

Utilizando as convergências (2.63), (2.65) e (2.67) e as ideias em [25], passemos ao limite em (2.37). A primeira parte de (2.37) é equivalente a

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u_m, v_j) \varphi'(t) dt + \nu \int_0^T ((u_m, v_j)) \varphi(t) dt + \int_0^T (u_m \cdot \nabla u_m, v_j) \varphi(t) dt + \\ & + \lambda \int_0^T ((\nabla d_m)^T \Delta \hat{d}_m, v_j) \varphi(t) dt = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, T)), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

As convergências fracas são suficientes para os termos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u_m, v_j) \varphi'(t) dt, \\ & \int_0^T ((u_m, v_j)) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \left((\nabla \hat{d})^T \Delta \hat{d}_m, v_j \right) \varphi(t) dt.$$

De fato, considere o termo

$$- \int_0^T (u_m, v_j) \varphi'(t) dt.$$

Temos que

$$u_m \mapsto - \int_0^T (u_m, v_j) \varphi'(t) dt$$

é um funcional linear em $L^2(0, T; V)$ para toda $v_j \in V$ e toda $\varphi \in C_c^\infty((0, T))$, logo, a convergência fraca em $L^2(0, T; V)$ é suficiente para concluir que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} - \int_0^T (u_m, v_j) \varphi'(t) dt = - \int_0^T (u, v_j) \varphi'(t) dt.$$

E assim procedemos para os demais termos bilineares.

As convergências fracas junto com as convergências fortes são suficientes para os termos

$$\int_0^T (u_m \cdot \nabla u_m, v_j) \varphi(t) dt$$

e

$$\int_0^T \left((\nabla \hat{d}_m)^T \Delta \hat{d}_m, v_j \right) \varphi(t) dt.$$

De fato, considere o termo

$$\int_0^T (u_m \cdot \nabla u_m, v_j) \varphi(t) dt.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_m \cdot \nabla u_m, v_j) \varphi(t) dt &= \sum_{k,l} \int_0^T \int_{\Omega} (u_m)_k (D_k u_m)_l (v_j)_l dx dt \\ &= - \sum_{k,l} \int_0^T \int_{\Omega} (u_m)_k (D_k v_j)_l (u_m)_l dx dt \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega} (u_m)_k (D_k v_j)_l (u_m)_l dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} (u)_k (D_k v_j)_l (u)_l dx dt = \\ &= \int_0^T \int_{\Omega} [(u_m)_k - (u)_k] (D_k v_j)_l (u_m)_l dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} (u)_k (D_k v_j)_l [(u_m)_l - (u)_l] dx dt \end{aligned}$$

e concluímos que cada termo do lado direito da equação converge a zero utilizando as convergências fracas e a convergência forte. Obtemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^T (u_m \cdot \nabla u_m, v_j) \varphi(t) dt = \int_0^T (u \cdot \nabla u, v_j) \varphi(t) dt.$$

E assim procedemos para o termo trilinear restante.

Passando ao limite obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u, v_j) \varphi'(t) dt + \nu \int_0^T ((u, v_j)) \varphi(t) dt + \int_0^T (u \cdot \nabla u, v_j) \varphi(t) dt + \\ & + \lambda \int_0^T \left((\nabla d)^T \Delta \hat{d}, v_j \right) \varphi(t) dt = 0, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, T)), \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A equação vale para todo $j \in \mathbb{N}$, logo, vale para qualquer combinação linear dos elementos v_j , ou seja, vale para um subespaço denso de V . Por continuidade podemos estender a igualdade para toda $v \in V$, isto é,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u, v) \varphi'(t) dt + \nu \int_0^T ((u, v)) \varphi(t) dt + \int_0^T (u \cdot \nabla u, v) \varphi(t) dt + \\ & + \lambda \int_0^T \left((\nabla d)^T \Delta \hat{d}, v \right) \varphi(t) dt = 0, \quad \forall v \in V, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, T)), \end{aligned}$$

que é equivalente a (2.22).

Analogamente, a segunda parte de (2.37) é equivalente a

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\hat{d}_m, e_j \right) \varphi'(t) dt + \int_0^T \left(u_m \cdot \nabla d_m, e_j \right) \varphi(t) dt + \int_0^T \left(-\Delta \hat{d}_m + \tilde{f}_\varepsilon(d_m), e_j \right) \varphi(t) dt = \\ = \int_0^T \left(\partial_t \tilde{d}, e_j \right) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, T)), \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

As convergências fracas são suficientes para os termos

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\hat{d}_m, e_j \right) \varphi'(t) dt, \\ \int_0^T \left(u_m \cdot \nabla \tilde{d}, e_j \right) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

e

$$\int_0^T \left(\Delta \hat{d}_m, e_j \right) \varphi(t) dt.$$

As convergências fracas junto com as convergências fortes são suficientes para os termos

$$\int_0^T \left(u_m \cdot \nabla \hat{d}_m, e_j \right) \varphi(t) dt$$

e

$$\int_0^T \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_m), e_j \right) \varphi(t) dt.$$

Passando ao limite obtemos

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\hat{d}, e_j \right) \varphi'(t) dt + \int_0^T \left(u \cdot \nabla d, e_j \right) \varphi(t) dt + \int_0^T \left(-\Delta \hat{d} + \tilde{f}_\varepsilon(d), e_j \right) \varphi(t) dt = \\ = \int_0^T \left(\partial_t \tilde{d}, e_j \right) \varphi(t) dt, \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, T)), \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A equação vale para todo $j \in \mathbb{N}$, logo, vale para qualquer combinação linear dos elementos e_j e, então, por continuidade, vale para cada $e \in L^2(\Omega)$, isto é,

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(\hat{d}, e \right) \varphi'(t) dt + \int_0^T \left(u \cdot \nabla d, e \right) \varphi(t) dt + \int_0^T \left(-\Delta \hat{d} + \tilde{f}_\varepsilon(d), e \right) \varphi(t) dt = \\ = \int_0^T \left(\partial_t \tilde{d}, e \right) \varphi(t) dt, \quad \forall e \in L^2(\Omega), \quad \forall \varphi \in C_c^\infty((0, T)), \end{aligned}$$

que é equivalente a (2.23).

Ainda com as ideias de [25], pode-se verificar que $u(0) = u_0$ e $d(0) = d_0$, mostrando que (u, d) é solução do problema 1. De fato, a passagem ao limite foi feita considerando-se $\varphi \in C_c^\infty((0, T))$, mas basta que $\varphi \in C^1((0, T))$. Escolha $\varphi \in C^1((0, T))$ tal que $\varphi(T) = 0$, temos que a primeira parte de (2.37) implica que

$$\begin{aligned} - \int_0^T \left(u_m, v_j \right) \varphi'(t) dt + \nu \int_0^T \left((u_m, v_j) \right) \varphi(t) dt + \int_0^T \left(u_m \cdot \nabla u_m, v_j \right) \varphi(t) dt + \\ + \lambda \int_0^T \left((\nabla d_m)^T \Delta \hat{d}_m, v_j \right) \varphi(t) dt = \left(u_{0m}, v_j \right) \varphi(0). \end{aligned}$$

Utilizando as convergências fracas e fortes já obtidas e o fato de que $u_{0m} \rightarrow u_0$ em $L^2(0, T; H)$ podemos passar ao limite e obter

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u, v) \varphi'(t) dt + \nu \int_0^T ((u, v)) \varphi(t) dt + \int_0^T (u \cdot \nabla u, v) \varphi(t) dt + \\ + \lambda \int_0^T ((\nabla d)^T \Delta \hat{d}, v) \varphi(t) dt = (u_0, v) \varphi(0), \end{aligned} \quad (2.68)$$

para toda $v \in V$. Por outro lado, (2.22) implica que

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u, v) \varphi'(t) dt + \nu \int_0^T ((u, v)) \varphi(t) dt + \int_0^T (u \cdot \nabla u, v) \varphi(t) dt + \\ + \lambda \int_0^T ((\nabla d)^T \Delta \hat{d}, v) \varphi(t) dt = (u(0), v) \varphi(0), \end{aligned} \quad (2.69)$$

para toda $v \in V$. Subtraindo (2.68) de (2.69) obtemos

$$(u(0) - u_0, v) \varphi(0) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Escolhendo $\varphi \in C^1((0, T))$ tal que $\varphi(0) \neq 0$ temos que

$$(u(0) - u_0, v) = 0, \quad \forall v \in V.$$

Pela densidade de V em H obtemos

$$(u(0) - u_0, v) = 0, \quad \forall v \in H$$

e, então, tomando $v = u(0) - u_0$ concluímos que $u(0) = u_0$.

De maneira similar, podemos mostrar que $\hat{d}(0) = \hat{d}_0$. E como $d = \hat{d} + \gamma \tilde{d}$ temos que $d|_{\partial\Omega} = l$ e $d(0) = d_0$.

Portanto, as funções u e d também satisfazem as condições iniciais e de contorno e fica demonstrado o teorema 2.2.

Observação 2.3. Note que, uma vez que $\partial_t \tilde{d} \in L^\infty(0, T; H^{3/2}(\Omega))$, a maior dificuldade da passagem ao limite é a obtenção da compacidade da sequência (\hat{d}_m) em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$. Para tanto, utilizou-se o teorema 2.1 para limitar \hat{d} em $L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$. Mas, em vista do teorema 2.1 e da observação 2.1, poderíamos considerar Ω como sendo um subconjunto aberto, localmente Lipschitz e convexo de \mathbb{R}^n ou um subconjunto aberto de classe C^2 de \mathbb{R}^n e obteríamos o mesmo resultado de compacidade. Portanto, obteríamos o mesmo resultado de existência de solução.

□

2.2 Sobre a Unicidade de Solução para o Modelo Penalizado

A existência de solução fraca para as equações de Navier-Stokes é garantida para um conjunto limitado, conexo e localmente Lipschitz, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, para qualquer $N \in \mathbb{N}$, veja a seção 4 do capítulo 3 do livro de Temam [25]. Para $N \leq 4$, as imersões de Sobolev (1.11) nos permitem utilizar as mesmas técnicas empregadas na demonstração do teorema 2.2 para demonstrar a existência de uma solução $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ para as equações de Navier-Stokes. A existência dessa solução é dada pelo teorema 3.1, capítulo 3 do livro de Temam [25].

Na sequência do livro de Temam [25] pode-se acompanhar uma breve discussão sobre a unicidade da solução. Para $N = 2$, garante-se que a solução dada pelo teorema 3.1 é única, mas, para $N = 3$, a unicidade da solução dada pelo teorema 3.1 é um problema não resolvido. A regularidade da solução para a qual se garante a unicidade é maior do que a regularidade da solução dada pelo resultado de existência.

Quando se trata do modelo penalizado (2.7)-(2.11) a situação é parecida. O resultado de existência, teorema 2.2, nos garante a existência de uma solução semi-forte (definição 2.1) para $N = 2$ ou 3, mas a unicidade de solução é demonstrada apenas para funções mais regulares, como se pode ver no artigo de Guillén-González, Rodríguez-Bellido e Rojas-Medar [17]. Para o caso $N = 2$ existe um resultado de unicidade de solução no artigo de Lin e Liu [22]. Em ambos os artigos se supõe que os conjuntos são suficientemente regulares. Gostaríamos de demonstrar que a solução dada pelo teorema 2.2 é única quando $N = 2$ sem assumir mais regularidade para as soluções ou sobre a fronteira do conjunto Ω .

Suponha que (u_1, d_1) e (u_2, d_2) são soluções semi-fortes de (2.7)-(2.11) com os mesmos dados iniciais e de contorno, isto é, (u_1, d_1) satisfaz

$$(\partial_t u_1, v) + \nu((u_1, v)) + b(u_1, u_1, v) + \lambda((\nabla d_1)^T \Delta d_1, v) = 0, \quad \forall v \in V,$$

$$(\partial_t d_1, e) + ((u_1 \cdot \nabla) d_1, e) + \gamma(-\Delta d_1 + f_\varepsilon(d_1), e) = 0, \quad \forall e \in L^2(\Omega),$$

e (u_2, d_2) satisfaz

$$(\partial_t u_2, v) + \nu((u_2, v)) + b(u_2, u_2, v) + \lambda((\nabla d_2)^T \Delta d_2, v) = 0, \quad \forall v \in V,$$

$$(\partial_t d_2, e) + ((u_2 \cdot \nabla) d_2, e) + \gamma(-\Delta d_2 + f_\varepsilon(d_2), e) = 0, \quad \forall e \in L^2(\Omega).$$

Antes de prosseguir, vejamos qual a regularidade das soluções, façamos a análise para (u_1, d_1) . Gostaríamos que fosse $\partial_t u_1 \in L^2(0, T; V')$ para podermos utilizar o lema 1.7 e escrevermos

$$\langle \partial_t u_1, u_1 \rangle = \frac{1}{2} \partial_t \|u_1\|_H^2.$$

Lema 2.2. *Seja (u_1, d_1) é uma solução semi-forte do modelo penalizado. Se d_1 é tal que $\hat{d}_1 \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ então*

$$\partial_t u_1 \in L^2(0, T; V').$$

Demonstração. Temos que $u_1 \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ e $\partial_t u_1 \in L^1(0, T; V')$, pela proposição 2.1. Nessa proposição mostramos que $\mathcal{A}u_1 \in L^2(0, T; V')$ e que $\mathcal{B}u_1, \mathcal{C}d_1 \in L^1(0, T; V')$. Quando $N = 2$, é possível melhorar a regularidade de $\mathcal{B}u_1$. De fato,

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{B}u_1(t), v \rangle| &= |b(u_1(t), u_1(t), v)| = |b(u_1(t), v, u_1(t))| \\ &\leq C \|u_1(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \|v\|_V \\ &\leq C \|u_1(t)\|_H \|u_1(t)\|_V \|v\|_V, \end{aligned}$$

logo, $\mathcal{B}u_1 \in L^2(0, T; V')$. Resta-nos apenas melhorar a regularidade do termo $\mathcal{C}d_1$. É nesse ponto que é necessária a hipótese adicional sobre a regularidade de \hat{d}_1 . Temos que $d_1 = \hat{d}_1 + \tilde{d}_1$, logo,

$$\begin{aligned} -(\nabla \cdot (\nabla d_1 \odot \nabla d_1), v) &= (\nabla d_1 \odot \nabla d_1, \nabla v) \\ &= (\nabla \hat{d}_1 \odot \nabla \hat{d}_1, \nabla v) + (\nabla \hat{d}_1 \odot \nabla \tilde{d}_1, \nabla v) + \\ &\quad + (\nabla \tilde{d}_1 \odot \nabla \hat{d}_1, \nabla v) + (\nabla \tilde{d}_1 \odot \nabla \tilde{d}_1, \nabla v). \end{aligned}$$

Com a regularidade adicional $\hat{d}_1 \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ obtemos

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{C}\hat{d}_1(t), v \rangle| &= |b(v, \hat{d}_1(t), \Delta \hat{d}_1(t))| = |(\nabla \cdot (\nabla \hat{d}_1 \odot \nabla \hat{d}_1), v)| \\ &= |(\nabla \hat{d}_1 \odot \nabla \hat{d}_1, \nabla v)| \\ &\leq C \|\nabla \hat{d}_1(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \|v\|_V \\ &\leq C \|\nabla \hat{d}_1(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{d}_1(t)\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_V. \end{aligned}$$

Como $\tilde{d} \in L^\infty(0, T; H^{3/2}(\Omega))$, estimar os outros termos é mais simples. Então obtemos $\mathcal{C}d_1 \in L^2(0, T; V')$, concluindo a demonstração. ■

Seja $u = u_2 - u_1$ e $d = d_2 - d_1$. Então

$$(\partial_t u, v) + \nu((u, v)) + b(u_2, u_2, v) - b(u_1, u_1, v) + \lambda(b(v, d_2, \Delta d_2) - b(v, d_1, \Delta d_1)) = 0,$$

$$(\partial_t d, e) + b(u_2, d_2, e) - b(u_1, d_1, e) + \gamma(-\Delta d + f_\varepsilon(d_2) - f_\varepsilon(d_1), e) = 0,$$

com $u(0) = 0$, $d(0) = 0$, $u(t)|_{\partial\Omega} = 0$ e $d(t)|_{\partial\Omega} = 0$. Além disso,

$$d = \hat{d}_2 - \hat{d}_1 \in L^2(0, T; H^2(\Omega)).$$

Tome $v = u(t)$ e $e = -\lambda \Delta d(t)$, para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} & (\partial_t u, u) + \nu((u, u)) + b(u_2, u_2, u) - b(u_1, u_1, u) + \lambda(b(u, d_2, \Delta d_2) - b(u, d_1, \Delta d_1)) = 0, \\ & -\lambda(\partial_t d, \Delta d) - \lambda(b(u_2, d_2, \Delta d) - b(u_1, d_1, \Delta d)) + \gamma \lambda \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^2 - \gamma \lambda(f_\varepsilon(d_2) - f_\varepsilon(d_1), \Delta d) = 0. \end{aligned}$$

Temos que

$$b(u_2, u_2, u) - b(u_1, u_1, u) = b(u_2, u, u) + b(u, u_1, u) = b(u, u_1, u).$$

Quando somamos as duas equações aparece o termo

$$\begin{aligned} b(u, d_2, \Delta d_2) - b(u, d_1, \Delta d_1) - b(u_2, d_2, \Delta d) + b(u_1, d_1, \Delta d) &= b(u_2, d, \Delta d_1) - b(u_1, d, \Delta d_2) \\ &= b(u, d, \Delta d_1) - b(u_1, d, \Delta d). \end{aligned}$$

Então, ao somarmos as duas equações obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \gamma \lambda \|\Delta d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ & = \gamma \lambda(f_\varepsilon(d_2) - f_\varepsilon(d_1), \Delta d) - b(u, u_1, u) - \lambda b(u, d, \Delta d_1) + \lambda b(u_1, d, \Delta d). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Precisamos estimar de forma conveniente os termos do lado direito da equação.

O primeiro termo pode ser estimado por

$$\begin{aligned} |(f_\varepsilon(d_2) - f_\varepsilon(d_1), \Delta d)| &\leq \|f_\varepsilon(d_2) - f_\varepsilon(d_1)\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{3}{\varepsilon^2} \|d\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C(\varepsilon) \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C(\varepsilon)}{2\delta_1} \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta_1}{2} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

O segundo termo pode ser estimado utilizando as imersões de Sobolev e o lema 1.4,

$$\begin{aligned} |b(u, u_1, u)| &\leq C \|u\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{C}{2\delta_2} \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta_2}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

O terceiro termo pode ser estimado da mesma forma, utilizando o lema 1.5,

$$\begin{aligned} |b(u, d, \Delta d_1)| &\leq \|u\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla d\|_{L^4(\Omega)} \|\Delta d_1\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 2 \|\Delta d_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\Delta d_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq \|\Delta d_1\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\Delta d_1\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2\delta_3} \|\Delta d_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta_3}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{4\delta_4} \|\Delta d_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta_4}{4} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Analogamente, estimamos o quarto termo por

$$\begin{aligned}
|b(u_1, d, \Delta d)| &\leq \|u_1\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla d\|_{L^4(\Omega)} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 2^{1/2} \|u_1\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)} \\
&= 2^{1/2} \|u_1\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \\
&\leq \frac{1}{2^{3/2} \delta_5} \|u_1\|_{L^4(\Omega)}^4 \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3\delta_5}{2^{3/2}} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{1}{2\delta_5} \|u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3\delta_5}{2^{3/2}} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{C}{2\delta_5} \|\nabla u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla d\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{3\delta_5}{2^{3/2}} \|\Delta d\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Substituindo as estimativas em (2.70) e isolando alguns termos do lado direito da equação obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\nu - \frac{\delta_2}{2} - \frac{\lambda\delta_3}{2}\right) \|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\
&\quad + \left(\gamma\lambda - \frac{\gamma\lambda\delta_1}{2} - \frac{\lambda\delta_4}{2} - \frac{3\lambda\delta_5}{2^{3/2}}\right) \|\Delta d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\
&\leq \gamma\lambda \frac{C(\varepsilon)}{2\delta_1} \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C}{2\delta_2} \|\nabla u_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda}{2\delta_3} \|\Delta d_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\
&\quad + \frac{\lambda}{2\delta_4} \|\Delta d_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\lambda C}{2\delta_5} \|\nabla u_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Escolha $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ e δ_5 tais que

$$\nu - \frac{\delta_2}{2} - \frac{\delta_3}{2} > 0$$

e

$$\gamma\lambda - \frac{\gamma\lambda\delta_1}{2} - \frac{\lambda\delta_4}{2} - \frac{3\lambda\delta_5}{2^{3/2}} > 0.$$

Obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) &\leq C_1 \left(\|\nabla u_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta d_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\
&\quad + \lambda C_2 \left(1 + \|\Delta d_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \right. \\
&\quad \left. + \|\nabla u_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Considere os fatores integrantes

$$E_1(t) = e^{-C_1 \int_0^t \left(\|\nabla u_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta d_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds}$$

e

$$E_2(t) = e^{-C_2 \int_0^t \left(1 + \|\Delta d_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) ds}.$$

Segue de (2.71) que

$$\frac{d}{dt} \left(E_1(t) \|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda E_2(t) \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq 0. \tag{2.72}$$

Integrando de 0 a $t \in [0, T]$ e utilizando o fato de que $u(0) = 0$, $d(0) = 0$, $E_1(t) > 0$ e $E_2(t) > 0$ obtemos

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0. \quad (2.73)$$

Concluimos de (2.73) que

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

ou seja, $u = 0$, e

$$\|\nabla d(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

que implica que $d = 0$, porque $d(t) \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto, pelo que foi exposto, está demonstrado o seguinte resultado.

Teorema 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto qualquer. Se (u_1, d_1) e (u_2, d_2) são soluções semi-fortes do modelo penalizado tais que $\hat{d}_1, \hat{d}_2 \in L^2(0, T; H^2(\Omega))$ então $u_1 = u_2$ e $d_1 = d_2$.*

Em particular, em vista da observação 2.1, vale o seguinte resultado.

Corolário 2.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um polígono localmente Lipschitz, ou um subconjunto localmente Lipschitz convexo ou um aberto conexo de classe C^m , com $m \geq 2$. A solução dada pelo teorema 2.2 é única.*

Capítulo 3

APROXIMAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Demonstrada a existência de solução para o modelo penalizado (2.7)-(2.11), trabalharemos com a sua aproximação pelo método dos elementos finitos. Analogamente ao que foi feito no capítulo 2, consideramos o sistema equivalente, com \tilde{f}_ε no lugar de f_ε (definição em (2.32)),

$$\frac{\partial}{\partial t}u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p + \lambda \nabla \cdot (\nabla d \odot \nabla d) = 0 \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.2)$$

$$|d| \leq 1, \quad \frac{\partial}{\partial t}d + (u \cdot \nabla)d - \gamma(\Delta d - \tilde{f}_\varepsilon(d)) = 0 \quad (3.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \nabla \cdot u_0(x) = 0 \text{ e } d(x, 0) = d_0(x) \quad (3.4)$$

$$u(x, t) = 0, \quad d(x, t) = l(x, t), \quad \text{para } (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \quad (3.5)$$

e as funções \tilde{d} , solução de (2.12), e $\hat{d} = d - \gamma\tilde{d}$ para tratar da condição de contorno não homogênea e dependente do tempo sobre d .

Antes de propormos uma formulação variacional, um esquema totalmente discreto e fazermos a análise do erro, vejamos algumas definições e resultados.

3.1 Alguns Resultados sobre o Problema de Stokes Estacionário

Para facilitar a introdução de ideias, definições e resultados, consideremos um problema mais simples do que o que estamos tratando, as equações de Stokes estacionárias,

$$-\nu \Delta u + \nabla p = f \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.7)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.8)$$

Definição 3.1. *Seja X um espaço de Banach e seja $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear.*

1. *A forma bilinear a é dita contínua se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C \|u\|_X \|v\|_X, \quad \forall u, v \in X.$$

2. A forma bilinear a é dita coerciva se existe uma constante $C > 0$ tal que

$$a(u, u) \geq C \|u\|_X^2, \quad \forall u \in X.$$

□

Considere a formulação variacional de (3.6)- (3.8): encontrar $u \in V$ tal que

$$\nu((u, v)) = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

De maneira mais geral, seja X um espaço de Hilbert, $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua e coerciva e $f \in X'$, podemos considerar a formulação variacional abstrata: encontrar $u \in X$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X. \quad (3.9)$$

3.1.1 Aproximação de um espaço de normado

Queremos aproximar a formulação variacional por problemas envolvendo apenas espaços de dimensão finita, por exemplo: encontrar $u_h \in X_h$ tal que

$$a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in X_h, \quad (3.10)$$

onde $h > 0$ é um parâmetro tal que $h \rightarrow 0$.

Portanto, é interessante tratar da aproximação de espaços normados. Seja X um espaço normado.

Definição 3.2 (Aproximação externa). Uma aproximação externa de X é um conjunto formado por

1. um espaço normado Y e uma transformação linear contínua $\omega : X \longrightarrow Y$;
2. uma família de triplas $\{X_h, \Theta_h, \Pi_h\}$ onde, para cada $h > 0$,
 - X_h é um espaço normado;
 - Θ_h , chamado de operador prolongamento, é uma transformação linear contínua de X_h em Y ;
 - Π_h , chamado de operador restrição, é uma transformação (talvez não linear e descontínua) de X em X_h .

□

Observação 3.1. Se $Y = X$ e ω é a identidade então chamamos a aproximação de interna.

□

Estamos interessados em calcular o erro entre a solução exata da formulação variacional, $u \in X$, e a sua solução aproximada $u_h \in X_h$. Existem algumas formas de comparar u e u_h .

Definição 3.3. Para cada $h > 0$, $u \in X$ e $u_h \in X_h$, dizemos que

1. $\|\omega u - \Theta_h u_h\|_Y$ é o erro entre u e u_h ;
2. $\|u_h - \Pi_h u\|_{X_h}$ é o erro discreto entre u e u_h ;
3. $\|\omega u - \Theta_h \Pi_h u\|_Y$ é o erro de truncamento de u .

□

Definição 3.4 (Aproximação estável). Os operadores de prolongamento, Θ_h , são ditos estáveis se existe uma constante C independente de h tal que

$$\|\Theta_h\| = \sup_{u_h \neq 0} \frac{\|\Theta_h u_h\|_Y}{\|u_h\|_{X_h}} \leq C.$$

E uma aproximação de um espaço normado X é dita estável se os operadores de prolongamento são estáveis.

□

Definição 3.5 (Estabilidade dos operadores restrição). Seja \tilde{Y} um espaço normado tal que $Y \subseteq \tilde{Y}$. Diremos que o operador restrição é estável em \tilde{Y} se existe uma constante $C > 0$ independente de h tal que

$$\|\Theta_h \Pi_h u\|_{\tilde{Y}} \leq C \|u\|_{\tilde{Y}}.$$

□

Definição 3.6 (Aproximação convergente). Diz-se que uma aproximação externa é convergente se

1. $\lim_{h \rightarrow 0} \|\omega u - \Theta_h \Pi_h u\|_Y = 0, \forall u \in X$;
2. para cada sequência $(u_{h'})$ de elementos de $X_{h'}$, com $h' \rightarrow 0$, tal que $\Theta_{h'} u_{h'}$ converge para $y \in Y$ na topologia fraca de Y tem-se que $y \in \omega X$, isto é, existe $u \in X$ tal que $y = \omega u$.

□

Observação 3.2. Se ω é sobrejetiva, como no caso de uma aproximação interna, por exemplo, a segunda condição da definição de aproximação convergente não é necessária.

□

Vejamos agora uma proposição que relaxa um pouco a primeira condição da definição de aproximação convergente.

Proposição 3.1. *Considere uma aproximação externa estável de X que é convergente no seguinte sentido: os operadores Π_h são definidos apenas em um subconjunto denso de X com a condição 1 da definição 3.6 valendo apenas para elementos deste subconjunto denso; a condição 2 continua a mesma.*

Neste caso, é possível estender Π_h para todo X de forma que a condição 1 vale para todo $u \in X$, ou seja, a aproximação de X obtida pela extensão é estável e convergente segundo a definição 3.6.

Demonstração. Veja a proposição 3.1 do capítulo 1 do livro de Temam [25].

■

Um exemplo da utilidade e do uso das definições vistas até então é a seção 3.2 do capítulo 1 do livro de Temam [25].

Para a aproximação dos espaços normados usaremos os espaços de funções definidas em Ω que são polinômios por partes. Estes espaços estarão associados a uma divisão do domínio. Neste trabalho será utilizada a divisão do domínio em n -simplexes. Um n -simplex é o envoltório convexo de $n + 1$ pontos não colineares em \mathbb{R}^n , em particular, um 2-simplex é um triângulo e um 3-simplex é um tetraedro. Chamaremos esta divisão de triangulação ou malha e chamaremos os simplex de triângulos. Considere, por exemplo, a seguinte triangulação do quadrado unitário.

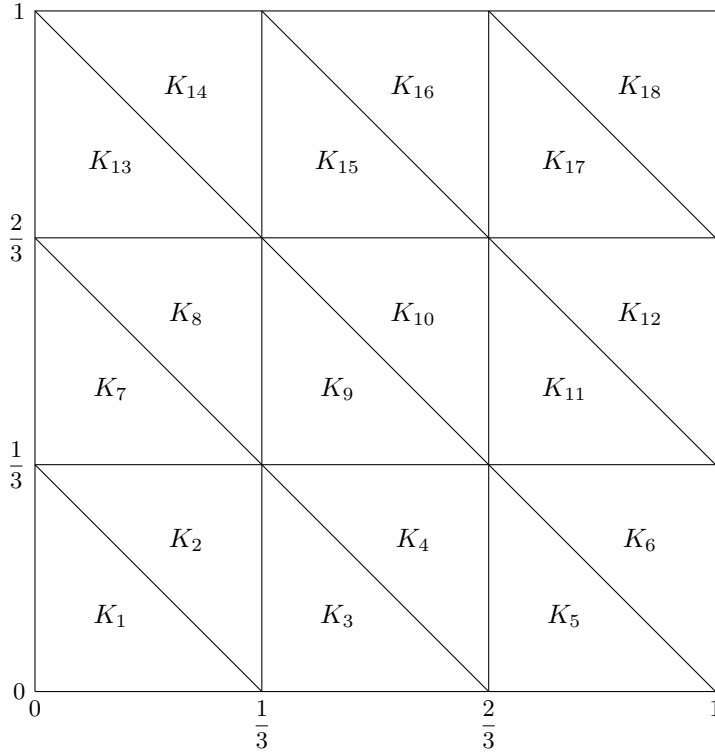


Figura 3.1: Triangulação com $h = 1/3$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um polígono localmente Lipschitz. Seja $\mathcal{T}_h(\Omega)$ uma triangulação de Ω . Denote os triângulos de $\mathcal{T}_h(\Omega)$ por K . Seja $n \in \mathbb{N}$, definimos os espaços de polinômios de grau menor ou igual a n por partes

$$\mathbb{P}_n(\mathcal{T}_h(\Omega)) = \left\{ v \in C^0(\Omega) \mid v|_K \text{ é um polinômio de grau menor ou igual a } n, \forall K \in \mathcal{T}_h(\Omega) \right\} \quad (3.11)$$

e o espaço das funções constantes por partes

$$\mathbb{P}_0(\mathcal{T}_h(\Omega)) = \left\{ v \in L^2(\Omega) \mid v|_K \text{ é uma função constante, } \forall K \in \mathcal{T}_h(\Omega) \right\}. \quad (3.12)$$

Com elementos triangulares é comum utilizar polinômios de grau zero (função constante), 1 ou 2 por partes. Exemplos de outros elementos podem ser encontrados no capítulo 2 do livro de Ciarlet [6]. Para se determinar de forma única um polinômio de grau zero basta conhecer um valor no triângulo. Em dimensão 2, para se determinar de forma única um polinômio de grau 1 são necessários 3 pontos, geralmente são usados os 3 vértices do triângulo. Para um polinômio de grau 2 são necessários 6 pontos, geralmente são usados os vértices e os pontos médios dos lados do triângulo.

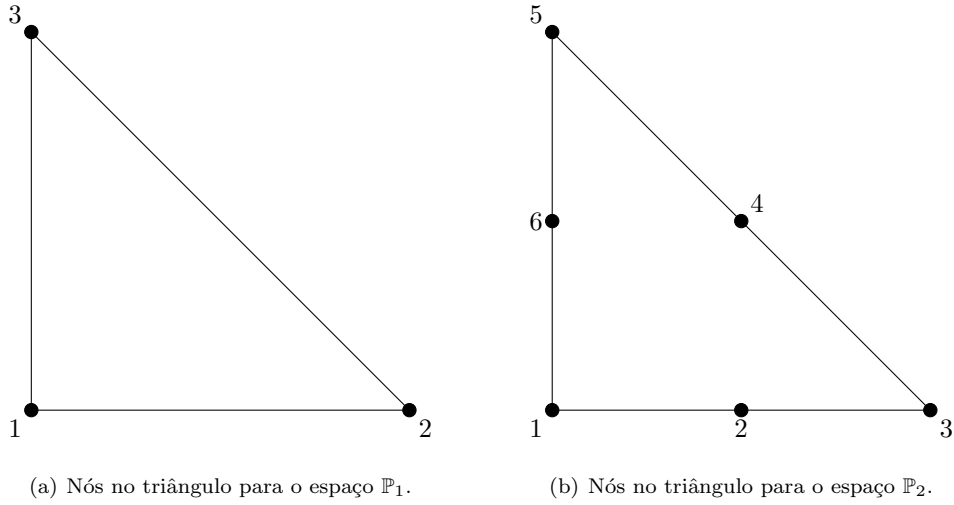


Figura 3.2: Triângulos da malha da Figura 3.1.

Além dos polinômios por partes, são utilizadas as chamadas funções bolha, ou bulbo. Para definir estas funções precisamos falar das coordenadas baricêntricas. Sejam A_1, \dots, A_{n+1} $n + 1$ pontos não colineares em \mathbb{R}^n . Isso é equivalente a dizer que a matriz com colunas

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \dots & A_{n+1} \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

tem determinante não nulo, isto é, é inversível. Logo, dado um ponto $P \in \mathbb{R}^n$ com coordenadas (x_1, \dots, x_n) , existem números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ unicamente determinados tais que

$$P = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j A_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j = 1. \quad (3.13)$$

Os números reais $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ são chamados de coordenadas baricêntricas do ponto P em relação a A_1, \dots, A_{n+1} .

As coordenadas baricêntricas não dependem da escolha da base e não são alteradas por translações no seguinte sentido. Seja $P_0 \in \mathbb{R}^n$, se $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n+1}$ são tais que

$$P + P_0 = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j (A_j + P_0) \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j = 1$$

então

$$P = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j A_j$$

e concluímos que $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$, $j = 1, \dots, n + 1$. Analogamente, se B é uma matriz inversível e $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n+1}$ são tais que

$$BP = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j BA_j$$

então

$$P = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{\lambda}_j A_j,$$

de onde concluímos, novamente, que $\tilde{\lambda}_j = \lambda_j$, $j = 1, \dots, n+1$.

As funções bolha são definidas em cada triângulo K da malha como

$$b_K(x) = \lambda_1(x)\lambda_2(x)\dots\lambda_{n+1}(x), \quad \forall x \in K, \quad (3.14)$$

e estendidas por zero fora de K . Note que em ∂K uma das coordenadas baricênticas é zero, logo, $b_K(x)|_{\partial K} = 0$. Chamaremos de $\mathbb{B}(\mathcal{T}_h(\Omega))$ o espaço gerado pelas funções bolha b_K , isto é,

$$\mathbb{B}(\mathcal{T}_h(\Omega)) = \text{Span}\{ \{b_K\}_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \}. \quad (3.15)$$

Tanto na montagem do sistema linear envolvido na aproximação por elementos finitos quanto na análise numérica das aproximações por polinômios é comum utilizar um triângulo de referência, denotado por \hat{K} . Em dimensão 2, por exemplo, é comum utilizar o triângulo de referência de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Nas triangulações utilizadas neste trabalho todo triângulo $K \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ é imagem de \hat{K} por uma transformação afim inversível $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ dada por

$$F_K(\hat{x}) = S_K \hat{x} + x_K, \quad (3.16)$$

onde S_K é uma matriz inversível.

Observe que, pela análise sobre as coordenadas baricênticas, temos que

$$b_{\hat{K}}(\hat{x}) = b_K(F(\hat{x})). \quad (3.17)$$

Definição 3.7 (Triangulação admissível). Uma triangulação $\mathcal{T}_h(\Omega)$ de Ω é dita admissível se

1. $\Omega(h) := \left(\bigcup_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} K \right) \subset \Omega$;
2. Se K e K' são triângulos de $\mathcal{T}_h(\Omega)$ então $\text{int}(K) \cap \text{int}(K') = \emptyset$ e, ou $K \cap K'$ é vazio, ou $K \cap K'$ consiste de apenas um ponto, ou $K \cap K'$ é exatamente uma face comum a K e K' .

□

De agora em diante serão consideradas apenas triangulações admissíveis. Seja h_K o raio do menor círculo que contém K e h'_K o raio do maior círculo contido em K .

Lema 3.1. Seja K um n -simplex com vértices A_1, \dots, A_{n+1} . Temos que

$$|\nabla \lambda_i| \leq \frac{1}{h'_K}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Daí segue que

$$|\nabla b_K(x)| \leq \frac{1}{h'_K}.$$

Demonstração. A primeira afirmação está demonstrada no livro de Temam [25], lema 4.2, na seção 4 do capítulo 1. Para a segunda afirmação basta notar que

$$\nabla b_k(x) = \left(\prod_{i=2}^{n+1} \lambda_i(x) \right) \nabla \lambda_1 + \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n+1} \lambda_i(x) \right) \nabla \lambda_2 + \cdots + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i(x) \right) \nabla \lambda_{n+1}$$

e então

$$|\nabla b_k(x)| \leq \left(\prod_{i=2}^{n+1} \lambda_i(x) \right) |\nabla \lambda_1| + \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n+1} \lambda_i(x) \right) |\nabla \lambda_2| + \cdots + \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i(x) \right) |\nabla \lambda_{n+1}|.$$

Como cada $0 \leq \lambda_i \leq 1$ temos que

$$|\nabla b_k(x)| \leq \lambda_{n+1}(x) |\nabla \lambda_1| + \lambda_n(x) |\nabla \lambda_2| + \cdots + \lambda_1(x) |\nabla \lambda_{n+1}|$$

e segue da primeira afirmação que

$$|\nabla b_k(x)| \leq \frac{1}{h'_K} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(x) = \frac{1}{h'_K},$$

completando a demonstração. ■

Com cada triangulação admissível $\mathcal{T}_h(\Omega)$ associe os números

$$R(h) = \sup_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} h_K, \quad (3.18)$$

$$r(h) = \inf_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} h'_K, \quad (3.19)$$

$$\sigma(h) = \sup_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \frac{h_K}{h'_K}. \quad (3.20)$$

Queremos fazer $R(h) \rightarrow 0$. A seguinte regularidade da família de triangulações é necessária para se obter aproximações convergentes.

Definição 3.8 (Família regular de triangulações). Diz-se que uma subfamília $\{\mathcal{T}_h(\Omega)\}_{h \in \mathcal{H}}$ de uma família de triangulações admissíveis é regular se $\sigma(h)$ se mantém limitado à medida que $R(h) \rightarrow 0$, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sigma(h) \leq \alpha < \infty.$$

□

Definição 3.9 (Família quasi-uniforme de triangulações). Uma subfamília $\{\mathcal{T}_h(\Omega)\}_{h \in \mathcal{H}}$ de uma família regular de triangulações é dita quasi-uniforme se existe $\alpha > 0$ independente de h tal que

$$h_k \leq \alpha h, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h(\Omega)$$

□

Um exemplo de aproximação interna de $H_0^1(\Omega)$, onde Ω é um polígono localmente Lipschitz, é a dada por

$$\Theta_h = \text{identidade e } \Pi_h = \text{interpolação polinomial de grau 2,}$$

onde Π_h está definida no subconjunto denso $C_c^\infty(\Omega)$ de $H_0^1(\Omega)$. Esta aproximação é estável, pois $\|\Theta_h\| = 1$, para todo $h > 0$. Pelos resultados do capítulo 3 do livro de Ciarlet [6], se a família de triangulações é regular, temos que

$$\|v - \Pi_h v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch^2,$$

para toda v suficientemente regular. Junto com a proposição 3.1, concluimos que a aproximação proposta é convergente. Além disso, temos estimativas para o erro de truncamento $v - \Pi_h v$, o que é essencial para a análise do erro.

Para tratar do problema de Stokes precisamos de uma aproximação do espaço V . Antes disso, tratemos de uma complicação que aparece devido a (3.7), a condição de *inf-sup*.

3.1.2 A condição de *inf-sup*

Sejam X e M espaços de Hilbert. Para motivar a discussão sobre a condição de *inf-sup*, considere o problema: encontrar $(u, p) \in X \times M$ tal que

$$a(u, v) + b(v, p) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in X, \quad (3.21)$$

$$b(u, q) = 0, \quad \forall q \in M, \quad (3.22)$$

onde $f \in X'$ é dado, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear coerciva e contínua e $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear contínua. Quando tomamos $X = H_0^1(\Omega)$, $M = L^2(\Omega)$, $a(u, v) = ((u, v))$ e $b(v, p) = (-\nabla \cdot v, p)$ obtemos uma formulação fraca de (3.6)-(3.8).

Às formas bilineares a e b associamos as transformações lineares contínuas

$$A : X \rightarrow X' \quad (3.23)$$

dada por $\langle Au, v \rangle = a(u, v)$, para todo $v \in X$, para todo $u \in X$,

$$B : X \rightarrow M' \quad (3.24)$$

$$B^T : M \rightarrow X' \quad (3.25)$$

dadas por $\langle Bv, p \rangle = \langle B^T p, v \rangle = b(v, p)$, para todo $v \in X$ e $p \in M$. Podemos escrever (3.21)-(3.22) como

$$Au + B^T p = f, \quad (3.26)$$

$$Bu = 0. \quad (3.27)$$

As equações (3.26)-(3.27) lembram o formato de um problema de minimização de uma função quadrática sujeito às restrições lineares de igualdade $Bu = 0$, veja o capítulo por Gunzburger [18]. Neste caso, se A é inversível, uma condição necessária e suficiente para que o problema tenha solução única é que a matriz de B^T tenha posto completo. Pode-se mostrar que isso é equivalente a dizer que b satisfaz a condição de *inf-sup*: existe $k_0 > 0$ tal que

$$\sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq k_0 \|q\|_M, \quad \forall q \in M,$$

ou, ainda,

$$\inf_{q \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|q\|_M \|v\|_X} \geq k_0. \quad (3.28)$$

Para o problema abstrato em dimensão infinita a situação é análoga. Temos os seguintes resultados.

Proposição 3.2. *São equivalentes:*

1. $b : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de *inf-sup* (3.28);
2. o operador B^T é um isomorfismo de M em $(\text{Ker}(B))^0$, o anulador de $\text{Ker}(B)$, e

$$\|B^T q\|_{X'} \geq k_0 \|q\|_M, \quad \forall q \in M;$$

3. o operador B é um isomorfismo de $(\text{Ker}(B))^\perp$, o complemento ortogonal de $\text{Ker}(B)$, em M' e

$$\|Bv\|_{M'} \geq k_0 \|v\|_X, \quad \forall v \in X.$$

Demonstração. Veja o lema 4.1 do capítulo 1 do livro de Girault e Raviart [15]. ■

Proposição 3.3. *Se a forma bilinear contínua $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ é coerciva em $\text{Ker}(B)$ então (3.26)-(3.27) tem uma única solução $(u, p) \in X \times M$ se, e somente se, a forma bilinear $b : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de *inf-sup* (3.28).*

Demonstração. Veja o teorema 4.1 do capítulo 1 do livro de Giraul Raviart [15]. ■

No caso particular do problema de Stokes temos que a condição de *inf-sup* não é satisfeita pelo par $(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ e sim pelo par $(H_0^1(\Omega), L_0^2(\Omega))$, onde

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L_0^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}. \quad (3.29)$$

Note que $L_0^2(\Omega)$ é um subespaço fechado de $L^2(\Omega)$. Mais precisamente, é o complemento ortogonal do subespaço fechado das funções constantes, ou ainda o quociente de $L^2(\Omega)$ pelo subespaço fechado

$Ker(B^T)$. Sendo assim, considere o problema de Stokes com as formas definidas nos domínios apropriados, $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, $b : H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ e as equações

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ b(u, q) &= 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Este problema é equivalente a (3.21)-(3.22), pois se $b(u, q) = 0$, para todo $q \in L_0^2(\Omega)$ e todo elemento de $L^2(\Omega)$ se escreve como uma função constante mais um elemento de $L_0^2(\Omega)$ então $b(u, q) = 0$, para todo $q \in L^2(\Omega)$. Daí, concluímos também que $Ker(B) = V$.

Pelo raciocínio apresentado acima, temos que existe $(u, p) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que (3.21) é satisfeita. Temos que u é única e $u \in V$, isto é, (3.22) também é satisfeita, e que p é unicamente determinada a menos de uma constante, isto é, a menos de um elemento de $Ker(B^T)$.

Vejamos agora a relevância da condição de *inf-sup* para a aproximação do problema abstrato (3.21)-(3.22) por problemas postos em espaços de dimensão finita.

Sejam $X_h \subset X$ e $M_h \subset M$ subespaços (fechados) de dimensão finita, portanto, fechados. Considere o problema aproximado

$$a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in X_h, \quad (3.30)$$

$$b(u_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h. \quad (3.31)$$

Defina os análogos discretos dos operadores A , B e B^T , $A_h : X_h \longrightarrow X'_h$, $B_h : X_h \longrightarrow M'_h$ e $B_h^T : M_h \longrightarrow X'_h$ dados por

$$\langle A_h u_h, v_h \rangle = \langle A u_h, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in X_h,$$

$$\langle B_h v_h, q_h \rangle = \langle B v_h, q_h \rangle, \quad \forall q_h \in M_h,$$

$$\langle B_h^T q_h, v_h \rangle = \langle B_h^T q_h, v_h \rangle, \quad \forall v_h \in X_h.$$

Note que

$$Ker(B_h) = \left\{ v_h \in X_h \mid b(v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h \right\},$$

então, em geral,

$$Ker(B_h) \not\subseteq Ker(B).$$

É o que acontece no caso das equações de Stokes, por exemplo.

Agora estamos exatamente no caso de dimensão finita que corresponde à minimização restrita de uma função quadrática, em particular, vale a análise que já foi feita para o problema em dimensão finita sobre a existência e unicidade de solução. Além da existência de solução para o problema aproximado, interessa-nos estimar $\|u - u_h\|_X$ e $\|p - p_h\|_M$. Neste sentido, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.4. *Suponha que $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear coerciva e contínua e que $b : X \times M \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz inf-sup. Suponha, também, que $b_h : X_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de inf-sup, para cada $h > 0$, com constante k_h . Então, existem $c_1 > 0$ e $c_2 > 0$ tais que*

$$\|u - u_h\|_X \leq c_1 \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + c_2 \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M,$$

onde

$$c_1 \geq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{k_h}\right) \quad e \quad c_2 \geq \frac{\|b\|}{\alpha},$$

onde $\alpha > 0$ é a constante de coercividade de a .

Demonstração. Veja a proposição 2.6 do livro de Brezzi e Fortin [4], que decorre das proposições 2.4 e 2.5 do mesmo livro. ■

Observe que se $\lim_{h \rightarrow 0} k_h = 0$, ainda que $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M = 0$, não se pode concluir que $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_X = 0$, pois $\lim_{h \rightarrow 0} c_1 = +\infty$. Por outro lado, se existe $k_0 > 0$ tal que $k_h \geq k_0 > 0$, para todo $h > 0$ então podemos tomar a constante c_1 de forma independente de h ,

$$c_1 = \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{k_0}\right).$$

Neste caso, basta que $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X = 0$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M = 0$ para concluirmos que $\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_X = 0$, isto é, está garantida a convergência das aproximações para a solução exata, pelo menos para a função u .

Portanto, mesmo que os espaços do problema original sejam tais que a condição de *inf-sup* é satisfeita, para tratar da convergência das aproximações do problema original, é preciso que os espaços utilizados nas aproximações de u e de p satisfaçam a condição de *inf-sup* de maneira uniforme em $h > 0$, isto é, que exista $k_0 > 0$ tal que $k_h \geq k_0 > 0$, para todo $h > 0$. De agora em diante, temos a seguinte definição.

Definição 3.10 (Condição de *inf-sup*). *Diz-se que um par de espaços (X_h, M_h) utilizados nas aproximações de X e M satisfaz a condição de inf-sup se existe $k_0 > 0$ tal que*

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|q_h\|_{M_h} \|v_h\|_{X_h}} \geq k_0. \quad (3.32)$$

□

Em geral, é difícil verificar a condição (3.32) pela definição e o que se faz é trabalhar com alguma condição suficiente mais fácil de demonstrar. Sabendo que a condição de *inf-sup* é verificada para os espaços X e M , do problema original, temos que, no caso de uma aproximação interna de X e de M , é suficiente que seja possível construir um operador conveniente de X em X_h .

Proposição 3.5. *Se a condição de inf-sup vale para os espaços X e M com constante $k > 0$ e existe um operador restrição $\Pi_h : X \rightarrow X_h$ tal que*

$$b(u - \Pi_h u, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h$$

$$\|\Pi_h u\|_X \leq C \|u\|_X$$

então (X_h, M_h) satisfaz inf-sup.

Demonstração. Este resultado é um caso particular do resultado dado pela proposição 2.8 do capítulo 2 do livro de Brezzi e Fortin [4]. De fato,

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X} \geq \sup_{v \in X} \frac{b(\Pi_h v, q_h)}{\|\Pi_h v\|_X} = \sup_{v \in X} \frac{b(v, q_h)}{\|\Pi_h v\|_X} \geq \frac{1}{C} \sup_{v \in X} \frac{b(v, q_h)}{\|v\|_X} \geq \frac{k}{C} \|q_h\|_M = \frac{k}{C} \|q_h\|_{M_h},$$

para todo $q_h \in M_h$, como queríamos. ■

3.1.3 Análise do erro

Considere as aproximações internas $\{X_h, \Theta_h, \Pi_h\}$ e $\{M_h, \theta_h, \pi_h\}$, isto é, Θ_h e θ_h são as identidades nos seus respectivos espaços. Suponha que (X_h, M_h) satisfaça *inf-sup* e que

$$\|u - \Pi_h u\|_X \leq C(u)h^m, \quad \forall u \in X, \quad \text{e} \quad \|p - \pi_h p\|_M \leq C(p)h^m, \quad \forall p \in M. \quad (3.33)$$

Nesse caso, segue diretamente da proposição 3.4 que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u - u_h\|_X \leq Ch^m,$$

onde u_h é solução do problema aproximado.

No caso das equações de Stokes, onde $X = H_0^1(\Omega)$ e $M = L_0^2(\Omega)$, existem vários pares de aproximações que se encaixam nestas hipóteses e, portanto, para os quais se tem as estimativas de erro obtidas acima, por exemplo, os pares do tipo Taylor-Hood. Nessas aproximações consideram-se $X_h = \mathbb{P}_m \cap H_0^1(\Omega)$ e $M_h = \mathbb{P}_{m-1} \cap L_0^2(\Omega)$, $m \geq 2$. Os operadores Π_h e π_h são os operadores de interpolação polinomial. Pode-se mostrar que vale (3.33) desde que a solução seja suficientemente regular, como é feito no capítulo 3 do livro de Ciarlet [6]. Então, para (u, p) suficientemente regular vale a estimativa de erro.

Outra técnica utilizada para se obter estimativas de erro para as equações de Stokes é construir uma aproximação externa $\{V_h, \Theta_h, \Pi_h\}$ do espaço V . Tomando $\{X_h, \theta_h, \pi_h\}$ e $\{M_h, \tilde{\theta}_h, \tilde{\pi}_h\}$ aproximações internas de $X = H_0^1(\Omega)$ e $M = L_0^2(\Omega)$, respectivamente, definimos

$$V_h = \left\{ v_h \in X_h \mid b(v_h, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in M_h \right\} \quad (3.34)$$

Considerando a definição de aproximação externa, tome $Y = X$. Suponha que

$$\|u - \Pi_h u\|_X \leq Ch^m \quad \text{e} \quad \|p - \pi_h p\|_M \leq Ch^m, \quad (3.35)$$

a ideia é separar o erro $\|u - u_h\|_X$ como

$$\|u - u_h\|_X = \|u - \Pi_h u + \Pi_h u - u_h\|_X \leq \|u - \Pi_h u\|_X + \|\Pi_h u - u_h\|_X. \quad (3.36)$$

Por (3.35), já temos a estimativa para o erro de truncamento $\|u - \Pi_h u\|_X$. Resta-nos estimar $\|\Pi_h u - u_h\|_X$.

Primeiro, obtemos de (3.21) e (3.30) a relação

$$a(u - u_h, v_h) + b(v_h, p - p_h) = 0. \quad (3.37)$$

Em seguida, somamos e subtraímos o termo $\Pi_h u$,

$$a(\Pi_h u - u_h, v_h) + b(v_h, p - p_h) = a(\Pi_h u - u, v_h).$$

Somamos e subtraímos $\pi_h p$,

$$a(\Pi_h u - u_h, v_h) + b(v_h, \pi_h p - p_h) = a(\Pi_h u - u, v_h) + b(v_h, \pi_h p - p), \quad (3.38)$$

e tomamos $v_h = \Pi_h u - u_h$. Como $u_h, \Pi_h u \in V_h$, temos que $b(\Pi_h u - u_h, \pi_h p - p_h) = 0$ e

$$a(\Pi_h u - u_h, \Pi_h u - u_h) = a(\Pi_h u - u, \Pi_h u - u_h) + b(\Pi_h u - u_h, \pi_h p - p).$$

Utilizando a coercividade de a e a continuidade de a e de b , obtemos

$$\alpha \|u_h - \Pi_h u\|_X^2 \leq (c_1 \|u - \Pi_h u\|_X + c_2 \|p - \pi_h p\|_M) \|u_h - \Pi_h u\|_X,$$

de onde concluímos, com (3.35),

$$\|u_h - \Pi_h u\|_X \leq Ch^m.$$

Portanto, junto com (3.36), obtemos a estimativa

$$\|u - u_h\|_X \leq Ch^m,$$

como queríamos.

Esta técnica é utilizada para estimar o erro da aproximação das equações de Stokes no capítulo 1 do livro de Temam [25]. São utilizados dois pares que satisfazem *inf-sup*, $X_h \subset \mathbb{P}_2$ com $M_h \subset \mathbb{P}_0$ e $X_h \subset \mathbb{P}_2 \oplus \mathbb{B}$ com $M_h \subset \mathbb{P}_1$, onde \mathbb{B} é definido em (3.15).

Estimado o erro da velocidade, a condição de *inf-sup* nos permite estimar o erro da pressão. De fato, avalie (3.38) em $v_h \in X_h$, obtemos

$$b(v_h, \pi_h p - p_h) = a(u_h - u, v_h) + b(v_h, \pi_h p - p). \quad (3.39)$$

Então,

$$\begin{aligned} k_0 \|\pi_h p - p_h\|_M &\leq \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \pi_h p - p_h)}{\|v_h\|_{X_h}} = \sup_{v_h \in X_h} \frac{a(u - u_h, v_h)}{\|v_h\|_{X_h}} + \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \pi_h p - p)}{\|v_h\|_{X_h}} \\ &\leq C \|u - u_h\|_X + C \|p - \pi_h p\|_M \\ &\leq Ch^m. \end{aligned}$$

Observação 3.3. Nas equações de Stokes, a forma bilinear a é bastante simples e nos permite obter facilmente a estimativa para a pressão. Quando se trata das equações de evolução, a forma bilinear que aparece envolve a derivada temporal da velocidade e a sua aproximação e estimar esta diferença é bastante trabalhoso, como pode ser visto no artigo de Heywood e Rannacher [19].

□

Observação 3.4. Para obter uma aproximação interna do espaço $L_0^2(\Omega)$ é necessário que o operador restrição $\tilde{\pi}_h$ preserve a propriedade de

$$\int_{\Omega} p(x) \, dx = 0,$$

isto é, deve ser tal que

$$\int_{\Omega} \tilde{\pi}_h p(x) \, dx = 0, \quad \forall p \in L_0^2(\Omega).$$

Os operadores restrição, em geral, podem não manter tal propriedade, como é o caso dos operadores de interpolação polinomial mencionados acima. Porém, uma vez que se tem uma aproximação de um espaço de Banach, o operador restrição pode ser modificado a fim de manter a propriedade de integral nula dos elementos de $L_0^2(\Omega)$ sem alterar suas propriedades de estabilidade e aproximação. De fato, basta fazer

$$\tilde{\tilde{\pi}}_h p = \tilde{\pi}_h p - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \tilde{\pi}_h p(x) \, dx.$$

O operador $\tilde{\tilde{\pi}}_h$ é tal que

$$\int_{\Omega} \tilde{\tilde{\pi}}_h p(x) \, dx = 0, \quad \forall p \in L_0^2(\Omega).$$

Além disso, as propriedades de estabilidade e aproximação de $\tilde{\tilde{\pi}}_h$ decorrem diretamente das propriedades de $\tilde{\pi}_h$.

□

3.1.4 Alguns operadores restrição

Finalmente, são apresentados alguns operadores restrição que serão utilizados na análise do erro. Serão utilizadas aproximações de primeira ordem, isto é, polinômios por partes de grau menor do que ou igual a um.

Consideremos, primeiramente, o operador introduzido por Scott e Zhang em [23] definido como segue: a cada nó α de $\mathcal{T}_h(\Omega)$, associe uma face σ_α de $\mathcal{T}_h(\Omega)$ que tem α como vértice, com a restrição de que $\sigma_\alpha \subset \partial\Omega$ se α é um nó de $\partial\Omega$. Em cada face σ_α , considere a base de $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h(\sigma_\alpha))$ composta por polinômios de Lagrange $\{\phi_j\}$ e a sua base dual $\{\psi_j\}$, isto é, a base de elementos do dual tais que

$$\psi_i(\phi_j) = \delta_{ij}.$$

Considerando o produto interno de $L^2(\sigma_\alpha)$ podemos identificar a base dual com o conjunto $\{\psi_j\}$ de funções de $\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h(\sigma_\alpha))$ tais que

$$(\phi_j, \psi_i) = \delta_{ij}.$$

Para simplificar a notação, denote por ϕ_α a função que vale um no vértice α e zero nos outros vértices e por ψ_α a função da base dual tal que $(\psi_\alpha, \phi_\alpha) = 1$.

Agora, para cada $v \in W^{1,1}(\Omega)$ e cada nó α de $\mathcal{T}_h(\Omega)$, defina

$$SZ_h v(\alpha) = \int_{\sigma_\alpha} v(s) \psi_\alpha(s) ds$$

e interpole estes valores por polinômios de grau 1 em cada triângulo de $\mathcal{T}_h(\Omega)$, ou seja

$$SZ_h v(x) = \sum_{\alpha} \phi_\alpha(x) \int_{\sigma_\alpha} v(s) \psi_\alpha(s) ds \quad (3.40)$$

Note que SZ_h preserva os elementos de \mathbb{P}_1 , isto é, $SZ_h p = p$, para todo $p \in \mathbb{P}_1$. Note também que o traço de $SZ_h v$ depende apenas do traço de v , então podemos definir um interpolante de $v|_{\partial\Omega}$ em $\partial\mathcal{T}_h(\Omega)$ dado por

$$SZ_h(v|_{\partial\Omega}) = (SZ_h v)|_{\partial\Omega}.$$

Além disso,

$$(SZ_h v)|_{\partial\Omega} = 0 \iff v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Sobre as propriedades de estabilidade e aproximação do operador SZ_h temos o seguinte resultado.

Proposição 3.6. *Sejam l e p números reais positivos tais que $l \geq 1$, se $p = 1$, e $l > 1/p$, caso contrário. Se $v \in W^{l,p}(\Omega)$ e a família de triangulações $\mathcal{T}_h(\Omega)$ é regular então*

$$\|v - SZ_h v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq Ch^{l-m} \|v\|_{W^{l,p}(\Omega)}, \quad 0 \leq m \leq l \leq 2,$$

onde m pode não ser inteiro. Em particular

$$\|SZ_h v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \tilde{C} \|v\|_{W^{m,p}(\Omega)}, \quad 0 \leq m \leq 2.$$

Demonstração. Este resultado é uma particularização do teorema 4.1 e do corolário 4.1 do artigo de Scott e Zhang [23] para o caso em que os polinômios utilizados são de grau menor ou igual a um. ■

No caso de uma função a valores vetoriais d , de componentes d_j , definimos o vetor $SZ_h d$ como sendo o vetor de componentes $SZ_h d_j$. Gostaríamos que SZ_h fosse tal que se $|d| \leq 1$ então $|SZ_h d|$ é limitada. Mostremos que o operador SZ_h satisfaz esta condição.

Dada uma face σ_α associada ao nó α , como anteriormente, considere a face de referência $\hat{\sigma}$ e a função afim bijetiva $F_\alpha : \hat{\sigma} \rightarrow \sigma_\alpha$. Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_\alpha} \phi_i(x) \psi_j(x) dx &= \int_{\hat{\sigma}} \phi_i(F_\alpha(\hat{x})) \psi_j(F_\alpha(\hat{x})) \det(S_\alpha) d\hat{x} \\ &= \int_{\hat{\sigma}} \hat{\phi}_i(\hat{x}) \psi_j(F_\alpha(\hat{x})) \det(S_\alpha) d\hat{x} \end{aligned}$$

logo, pela unicidade da base dual, temos que

$$\hat{\psi}_j(\hat{x}) = \det(S_\alpha) \psi_j(F_\alpha(\hat{x})), \quad (3.41)$$

onde

$$|\det(S_\alpha)| = \frac{\int_{\sigma_\alpha} dx}{\int_{\hat{\sigma}} d\hat{x}} = \frac{1}{\text{Area}(\sigma_\alpha)} |\sigma_\alpha| \leq Ch^\beta,$$

onde β é a dimensão de σ_α . Daí,

$$\|\psi_j\|_{L^\infty(\sigma_\alpha)} \leq Ch^{-\beta}. \quad (3.42)$$

Assim, se d é uma função vetorial com componentes d_j então

$$\begin{aligned} |SZ_h d_j(\alpha)|^2 &= \left(\int_{\sigma_\alpha} d_j(x) \psi_\alpha(x) dx \right)^2 \\ &\leq \int_{\sigma_\alpha} |d_j(x)|^2 dx \int_{\sigma_\alpha} |\psi_\alpha(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\sigma_\alpha} |d_j(x)|^2 dx \int_{\sigma_\alpha} Ch^{-2\beta} dx \\ &\leq Ch^{-\alpha} \int_{\sigma_\alpha} |d_j(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Logo, se $|d| \leq 1$ então $|SZ_h d(\alpha)| \leq C$. Temos que

$$SZ_h d(x) = \sum_{\alpha} SZ_h d(\alpha) \phi_\alpha(x),$$

logo, se $|d| \leq 1$ então

$$|SZ_h d(x)| \leq \sum_{\alpha} |SZ_h d(\alpha)| \phi_\alpha(x) \leq C \sum_{\alpha} \phi_\alpha(x) = C,$$

como queríamos. Note que a constante C não depende de h , o tamanho da malha.

Observação 3.5. Considere uma função g definida em $\partial\Omega$ tal que $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Temos que existe $v \in H^1(\Omega)$ tal que $v|_{\partial\Omega} = g$ e

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \tilde{C} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

A função $SZ_h g$ foi definida como sendo $(SZ_h v)|_{\partial\Omega}$. Na prática, para calcular $SZ_h g$, não é preciso conhecer a função v . De fato, dado um vértice $\alpha \in \partial\Omega$, escolha uma face $\sigma_\alpha \in \partial\Omega$ e

$$SZ_h g(\alpha) = \int_{\sigma_\alpha} g(x) \psi_\alpha(x) dx$$

e interpole por polinômios de grau 1. Note que $SZ_h g$ não depende da função v escolhida e que, pela unicidade do polinômio interpolador, temos que

$$SZ_h g = (SZ_h v) \Big|_{\partial\Omega}.$$

Além disso, o operador SZ_h definido para funções definidas no bordo de Ω tem as mesmas propriedades de aproximação e estabilidade do operador SZ_h .

□

A definição do operador SZ_h exige que a função a ser aproximada esteja bem definida no bordo de uma região, o que acontece, por exemplo, para funções de $W^{1,1}(\Omega)$. A estabilidade de SZ_h também é dada em $W^{1,1}(\Omega)$. Precisamos de um operador J_h que seja estável em um espaço de funções menos regulares, como os espaços $L^p(\Omega)$. Para tanto, em vez de utilizar faces, como na definição de SZ_h , utilizamos triângulos na definição de J_h .

O operador J_h , definido a seguir, é uma variação de SZ_h e foi introduzido por Girault e Lions em [14]. A cada nó α da triangulação $\mathcal{T}_h(\Omega)$ associe um triângulo K_α e, para cada $v \in L^p(\Omega)$, defina

$$J_h v(\alpha) = 0,$$

se $\alpha \in \partial\Omega$ e

$$J_h v(\alpha) = \int_{K_\alpha} v(x) \psi_\alpha(x) \, dx,$$

caso contrário. Em seguida, interpole por polinômios de \mathbb{P}_1 , isto é

$$J_h v(x) = \sum_a \phi_a(x) \int_{K_a} v(s) \psi_a(s) \, ds. \quad (3.43)$$

Sobre as propriedades de estabilidade e aproximação do operador J_h temos o seguinte.

Proposição 3.7. *Se $v \in W^{k+1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $k = 0$ ou 1 e $p \geq 1$, e a família de triangulações é regular então*

$$\|v - J_h v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C h^{k+1-m} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}, \quad m = 0 \text{ ou } 1,$$

onde $|\cdot|_{W^{l,p}(\Omega)}$ é a seminorma usual em $W^{l,p}(\Omega)$. Além disso, para $m = 0$ ou 1 ,

$$\|J_h v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \tilde{C} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja o apêndice do artigo de Girault e Lions [14]. ■

Utilizaremos o par $(\mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{B}, \mathbb{P}_1)$ para aproximar a velocidade e a pressão. A partir do operador J_h definimos o operador

$$I_h v(x) \Big|_K = J_h v(x) \Big|_K + c_K b_K(x), \quad \text{onde } c_K = \frac{1}{\int_K b_K(x) \, dx} \int_K (v - J_h v)(x) \, dx. \quad (3.44)$$

Tendo em mente que

$$|det(S_K)| = \frac{\int_K dx}{\int_{\hat{K}} d\hat{x}} = 2 |K|$$

e que

$$\begin{aligned} \int_K b_K(x) dx &= \int_{\hat{K}} b_K(F(\hat{x})) |det(S_K)| dx \\ &= 2 |K| \int_{\hat{K}} b_{\hat{K}}(\hat{x}) dx \\ &= C |K|, \end{aligned}$$

mostremos que as propriedades de I_h decorrem diretamente das propriedades de J_h .

Proposição 3.8. *Se $v \in W^{k+1,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, onde $k = 0$ ou 1 e $p \geq 1$, e a família de triangulações é regular então*

$$\|v - I_h v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq C h^{k+1-m} |v|_{W^{k+1,p}(\Omega)}, \quad m = 0 \text{ ou } 1,$$

onde $|\cdot|_{W^{l,p}(\Omega)}$ é a seminorma usual em $W^{l,p}(\Omega)$. Para $v \in W^{m,p}(\Omega)$, $m = 0$ ou 1 ,

$$\|I_h v\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq \tilde{C} |v|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Para a norma $L^p(\Omega)$, temos que

$$\|v - I_h v\|_{L^p(K)} \leq \|v - J_h v\|_{L^p(K)} + |c_K| \|b_K\|_{L^p(K)}.$$

Como $0 \leq b_K(x) \leq 1$, para $x \in K$,

$$\|b_K\|_{L^p(K)} \leq \left(\int_K b_K(x) dx \right)^{1/p} = C |K|^{1/p},$$

logo,

$$\begin{aligned} |c_K| \|b_K\|_{L^p(K)} &\leq \frac{C}{|K|^{1/q}} \int_K (v - J_h v)(x) dx \\ &\leq C \|v - J_h v\|_{L^p(K)}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|v - I_h v\|_{L^p(K)} \leq C \|v - J_h v\|_{L^p(K)}$$

e, de

$$\begin{aligned} \|v - I_h v\|_{L^p(\Omega)}^p &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \|v - I_h v\|_{L^p(K)}^p \\ &\leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \|v - J_h v\|_{L^p(K)}^p \\ &= C \|v - J_h v\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

concluimos que as propriedades de I_h decorrem das de J_h .

Para as normas $W^{1,p}(\Omega)$,

$$\|v - I_h v\|_{W^{1,p}(K)} \leq \|v - J_h v\|_{W^{1,p}(K)} + |c_K| \|b_K\|_{W^{1,p}(K)}.$$

Pelo lema 3.1 temos que

$$|\nabla b_K(x)| \leq \frac{1}{|h'_k|}, \quad \forall x \in K,$$

logo,

$$|c_K| \|b_K\|_{W^{1,p}(K)} \leq \frac{C}{h'_k} \|v - J_h v\|_{L^p(K)}.$$

Das propriedades de J_h decorre o resultado desejado para as propriedades de aproximação de I_h . De fato, no apêndice do artigo de Girault e Lions [14] temos que

$$\|v - J_h v\|_{L^p(K)} \leq Ch_K^2 \|v\|_{W^{2,p}(D_K)},$$

onde D_K é a união de todos os tetraedros que dividem um vértice, uma aresta ou uma face com K .

Então

$$|c_K| \|b_K\|_{W^{1,p}(K)} \leq \frac{C}{h'_k} \|v - J_h v\|_{L^p(K)} \leq C \frac{h_K^2}{h'_k} \|v\|_{W^{2,p}(D_K)} \leq Ch \|v\|_{W^{2,p}(D_K)}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \|v - I_h v\|_{W^{1,p}(K)} &\leq \|v - J_h v\|_{W^{1,p}(K)} + |c_K| \|b_K\|_{W^{1,p}(K)} \\ &\leq Ch_K \|v\|_{W^{2,p}(K)} + Ch_K \|v\|_{W^{2,p}(D_K)} \\ &\leq 2 Ch_K \|v\|_{W^{2,p}(D_K)} \\ &\leq \tilde{C} h \|v\|_{W^{2,p}(D_K)}, \end{aligned}$$

de onde obtemos a estimativa desejada (veja o apêndice do artigo de Girault e Lions [14]).

Analogamente para a estabilidade. ■

Proposição 3.9. 1. Para toda $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$(\nabla \cdot (v - I_h v), q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h(\Omega)).$$

2. Para toda $v \in L^2(\Omega)$,

$$\|v - I_h v\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq Ch \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Usaremos o seguinte lema na demonstração da proposição 3.9.

Lema 3.2. Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo, limitado e localmente Lipschitz tal que $|x - s| \leq h_K$, para todos $x, s \in K$. Se $v \in W^{1,p}(K)$ então

$$\left(\int_K |v(x) - v(s)|^p ds \right)^{1/p} \leq h_K \|\nabla v\|_{L^p(K)},$$

para quase todo $x \in K$.

Demonstração. Seja $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e defina $u(t) = v(x + t(s - x))$. Temos que

$$u'(t) = \nabla v(x + t(s - x))^T \cdot (s - x),$$

de onde

$$v(x) - v(s) = - \int_0^1 \nabla v(x + t(s - x))^T \cdot (s - x) dt.$$

Logo,

$$|v(x) - v(s)|^p \leq |x - s|^p \int_0^1 |\nabla v(x + t(s - x))|^p dt$$

e

$$\begin{aligned} \int_K |v(x) - v(s)|^p ds &\leq h_K^p \int_K \int_0^1 |\nabla v(x + t(s - x))|^p dt ds \\ &= h_K^p \int_0^1 \int_K |\nabla v(x + t(s - x))|^p ds dt \\ &\leq h_K^p \int_0^1 \int_K |\nabla v(s)|^p ds dt, \end{aligned}$$

porque K é convexo, e o resultado está demonstrado para $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Seja $v \in W^{1,p}(K)$, $1 \leq p < \infty$. Como K é localmente Lipschitz, pelo teorema 1.2, existe um operador extensão contínuo de $W^{1,p}(K)$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (proposição 1.21), temos que existe uma sequência (v_j) de funções $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$v_j \longrightarrow v \text{ em } L^p(K)$$

$$\nabla v_j \longrightarrow \nabla v \text{ em } L^p(K).$$

Assim, estendemos o resultado demonstrado para funções de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ para funções $v \in W^{1,p}(K)$, $1 \leq p < \infty$.

Se $p = \infty$ então $v \in W^{1,p}(K)$, $1 \leq p \leq \infty$, porque K é limitado. Neste caso, o resultado vale para todo $p \geq 1$ finito e basta aplicar o limite quando $p \rightarrow \infty$ para obter o resultado desejado para $p = \infty$. ■

Demonstração da proposição 3.9. Note que, para cada $K \in \mathcal{T}_h(\Omega)$,

$$\int_K v(s) - I_h v(s) ds = 0, \forall v \in L^1(\Omega). \quad (3.45)$$

Se $v \in H_0^1(\Omega)$ e $q_h \in \mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h(\Omega))$ então

$$(\nabla \cdot (v - I_h v), q_h) = - (v - I_h v, \nabla q_h).$$

Como $q_h \in \mathbb{P}^1(\mathcal{T}_h(\Omega))$, temos que ∇q_h é constante por partes, logo, por (3.45),

$$(\nabla \cdot (v - I_h v), q_h) = - (v - I_h v, \nabla q_h) = \sum_{i=1}^m c_i \int_K v(s) - I_h v(s) ds = 0,$$

concluindo a demonstração do item 1.

Seja agora $v \in L^2(\Omega)$. Identificamos $v - I_h v \in L^2(\Omega)$ com um elemento de $H^{-1}(\Omega)$ fazendo

$$u \mapsto \int_{\Omega} (v - I_h v)(s) u(s) \, ds, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Observe que

$$\int_{\Omega} (v - I_h v)(s) u(s) \, ds = \sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \int_K (v - I_h v)(s) u(s) \, ds.$$

Por (3.45),

$$\int_K (v - I_h v)(s) u(s) \, ds = \int_K (v - I_h v)(s) (u(s) - u(x)) \, ds,$$

para algum $x \in K$ fixado, e temos que

$$\int_K (v - I_h v)(s) (u(s) - u(x)) \, ds \leq \|v - I_h v\|_{L^2(K)} \left(\int_K |u(x) - u(s)|^2 \, ds \right)^{1/2}.$$

Pelo lema 3.2 temos que

$$\begin{aligned} \left(\int_K |u(x) - u(s)|^2 \, ds \right)^{1/2} &\leq h_K \|\nabla u\|_{L^2(K)} \\ &\leq h_K \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq h \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (v - I_h v)(s) u(s) \, ds &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \int_K (v - I_h v)(s) u(s) \, ds \\ &\leq h \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \|v - I_h v\|_{L^2(K)} \\ &\leq Ch \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \|v - I_h v\|_{L^2(K)}^2 \right)^{1/2} \\ &= Ch \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\|v - I_h v\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq Ch \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)},$$

como queríamos. ■

Observação 3.6. Decorre do item 1 da proposição 3.9 que se $u \in V$ então

$$(\nabla \cdot I_h u, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h(\Omega)),$$

isto é, $I_h u \in V_h$, onde V_h é dado por (3.34), considerando $X_h = (\mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h(\Omega)) \cap H_0^1(\Omega)) \oplus \mathbb{B}(\mathcal{T}_h(\Omega))$ e $M_h = \mathbb{P}_1(\mathcal{T}_h(\Omega)) \cap L_0^2(\Omega)$. Segue também do item 1 da proposição 3.9, das propriedades de estabilidade de I_h e da proposição 3.5 que o par (X_h, M_h) satisfaz a condição de *inf-sup*.

□

Definimos ainda um último operador restrição estável em $L^p(\Omega)$. Dada $v \in L^p(\Omega)$, definamos $K_h v$ como sendo a função constante por partes

$$K_h v|_K = \frac{1}{|K|} \int_K v(s) \, ds. \quad (3.46)$$

Proposição 3.10. *Seja $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Temos que*

$$\|v - K_h v\|_{L^p(\Omega)} \leq h \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Para $v \in L^p(\Omega)$,

$$\|K_h v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. A estabilidade é imediata. De fato,

$$|K_h v(x)| \leq \frac{1}{|K|^{1/p}} \|v\|_{L^p(K)},$$

de onde segue que

$$\|K_h v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

A propriedade de aproximação segue de

$$\left| (v(x) - K_h v(x))|_K \right| \leq \frac{1}{|K|} \int_K |v(x) - v(s)| \, ds \leq \frac{1}{|K|^{1/p}} \left(\int_K |v(x) - v(s)|^p \, ds \right)^{1/p}$$

que, pelo lema 3.2, implica que

$$\left| (v(x) - K_h v(x))|_K \right| \leq \frac{h}{|K|^{1/p}} \|\nabla v\|_{L^p(K)}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |(v(x) - K_h v(x))|^p \, dx &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \int_K |(v - K_h v)(x)|^p \, dx \\ &\leq h^p \sum_{K \in \mathcal{T}_h(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(K)}^p \\ &= h^p \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

Observação 3.7. Os operadores restrição aqui apresentados são exemplos de operadores restrição que preservam polinômios, além da interpolação polinomial.

□

Observação 3.8. Note que os operadores restrição apresentados são transformações lineares, logo, decorre das propriedades de estabilidade que, definidos nos espaços convenientes, esses operadores restrição são transformações lineares contínuas.

□

3.2 Formulação Variacional

Para não trabalhar com um subespaço de $H^2(\Omega)$ ao aproximar o vetor diretor d , Girault e Guillén-González [13] propõem introduzir Δd como variável, mais precisamente,

$$w = -\mu \Delta d, \quad (3.47)$$

onde $\mu = \sqrt{\lambda}$. Como $w = -\mu \Delta d = -\mu \Delta \hat{d}$ e \hat{d} se anula em $\partial\Omega$, a relação entre w e \hat{d} é dada por

$$\left(\nabla \hat{d}, \nabla g \right) = \left(w, g \right), \quad \forall g \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, cada $w \in L^2(\Omega)$, ou $w \in H^{-1}(\Omega)$, define \hat{d} de forma única e

$$\|w\|_{L^2(\Omega)} = \|\Delta \hat{d}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \text{ou} \quad \|w\|_{H^{-1}(\Omega)} = \|\nabla \hat{d}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Recuperando a pressão p no problema 1 como nas equações de Navier-Stokes (veja [25]), podemos substituir (2.22) e (2.23) pelas equações equivalentes

$$\begin{aligned} \partial_t (u, v) + \nu((u, v)) + (u \cdot \nabla u, v) + \\ -\mu \left((\nabla d)^T w, v \right) - (p, \nabla \cdot v) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\gamma(w, e) + \mu \{ \partial_t(d, e) + (u \cdot \nabla d, e) + \gamma(f_\varepsilon(d), e) \} = 0, \quad \forall e \in L^2(\Omega) \quad (3.49)$$

$$(\nabla \cdot u, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (3.50)$$

$$\mu(\nabla d, \nabla g) - (w, g) = 0, \quad \forall g \in H_0^1(\Omega), \quad (3.51)$$

onde $u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$, $d \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$, $w \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $p \in H^{-1}(0, T; L_0^2(\Omega))$. Como $H^{3/2}(\Omega)$ está continuamente imerso em $W^{1,3}(\Omega)$ os termos das duas primeiras linhas da formulação variacional estão bem definidos. Temos ainda, de (3.51) e do teorema 2.3, que se $w \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ então $\hat{d} \in L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$.

Associamos a (3.48)-(3.51) algumas formas bilineares e trilineares convenientes ao seu tratamento teórico e numérico. Sejam

$$a_1(u, v) = \nu((u, v)), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega), \quad (3.52)$$

$$b(u, q) = -(\nabla \cdot u, q), \quad \forall u \in H^1(\Omega), \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad (3.53)$$

$$c_1(\tilde{u}, u, v) = (\tilde{u} \cdot \nabla u, v), \quad \forall \tilde{u}, u, v \in H^1(\Omega). \quad (3.54)$$

Um fato já utilizado na obtenção da chamada desigualdade de energia (2.19) foi que

$$(\nabla d)^T w \cdot v = (v \cdot \nabla d) \cdot w, \quad \forall d, v, w \in \mathbb{R}^n,$$

o que implica que

$$\left((\nabla d)^T w, v \right) = c_1(v, d, w), \quad \forall d \in W^{1,3}(\Omega), \quad v \in H^1(\Omega), \quad w \in L^2(\Omega).$$

Pelo lema 1.3 temos que

$$c_1(\tilde{u}, u, v) = -c_1(\tilde{u}, v, u), \quad \forall \tilde{u} \in V, \quad u, v \in H_0^1(\Omega).$$

Porém, com a discretização utilizada neste trabalho para o espaço V , essa propriedade deixa de valer porque não se verifica a condição de divergente nulo. Para manter esta propriedade no problema discreto utilizaremos a forma

$$\tilde{c}_1(\tilde{u}, u, v) = \frac{1}{2} (c_1(\tilde{u}, u, v) - c_1(\tilde{u}, v, u)) \quad (3.55)$$

no lugar de $c_1(\tilde{u}, u, v)$. Note que se $\tilde{u} \in V$ e $u, v \in H_0^1(\Omega)$ então

$$\tilde{c}_1(\tilde{u}, u, v) = c_1(\tilde{u}, u, v).$$

Podemos reescrever (3.48)-(3.51) utilizando as formas bilineares e trilineares dadas por (3.52)-(3.55) como

$$\begin{aligned} \partial_t (u, v) + a_1(u, v) + \tilde{c}_1(u, u, v) + \\ -\mu c_1(v, d, w) + b(v, p) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\gamma(w, e) + \mu \{ \partial_t(d, e) + c_1(u, d, e) + \gamma(f_\varepsilon(d), e) \} = 0, \quad \forall e \in L^2(\Omega) \quad (3.57)$$

$$b(u, q) = 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega) \quad (3.58)$$

$$\mu(\nabla d, \nabla g) - (w, g) = 0, \quad \forall g \in H_0^1(\Omega), \quad (3.59)$$

Para colocar o problema em uma forma mais compacta e conveniente definamos os espaços

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \quad Y = H_0^1(\Omega) \times W^{1,3}(\Omega), \quad \text{e} \quad M = L_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega). \quad (3.60)$$

Utilize as normas

$$\begin{aligned} \|(u, w)\|_X &= \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \\ \|(u, d)\|_Y &= \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|d\|_{W^{1,3}(\Omega)}, \\ \|(w, u)\|_M &= \left(\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Defina também a forma bilinear $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a((u, w), (v, e)) = a_1(u, v) + \gamma(w, e) \quad (3.62)$$

e a forma trilinear $c : Y \times X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$c((u, d), (u, w), (v, e)) = \tilde{c}_1(u, u, v) + \mu(c_1(u, d, e) - c_1(v, d, w)). \quad (3.63)$$

Finalmente, podemos formular o problema como segue.

Problema 3. Dados $(u_0, d_0) \in H \times H^1(\Omega)$ e $l \in H^1(0, T; H^1(\partial\Omega))$, encontrar $u \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$, $d \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^{3/2}(\Omega))$, $w \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e $p \in H^{-1}(0, T; L_0^2(\Omega))$ tais que

$$\begin{aligned} \partial_t((u, \mu d), (v, e)) + a((u, w), (v, e)) + c((u, d), (u, w), (v, e)) + \\ + b(v, p) + \mu\gamma(\tilde{f}_\varepsilon(d), e) = 0, \quad \forall (v, e) \in X, \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$b(u, q) + \mu((d, g)) - (w, g) = 0, \quad \forall (q, g) \in M, \quad (3.65)$$

com condições iniciais

$$u(0) = u_0, \quad d(0) = d_0$$

e sendo $\hat{d} = d - \gamma\tilde{d}$, onde \tilde{d} é solução de (2.12).

□

As equações (3.64) e (3.65) são obtidas ao somar as equações (3.48)-(3.51). Tendo as equações (3.64) e (3.65), podemos separá-las como (3.48)-(3.51) utilizando elementos de X e de M da forma $(v, 0), (0, e) \in X$ e $(q, 0), (0, g) \in M$ como funções teste. Logo, as equações (3.64)-(3.65) e (3.48)-(3.51) são equivalentes. Por outro lado, as equações (3.48)-(3.51) são equivalentes às equações (2.22)-(2.23).

Portanto, os problemas 1 e 3 são equivalentes.

Lema 3.3. A forma bilinear $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e coerciva, mais precisamente,

$$a((u, w), (v, e)) \leq 2 \max\{\nu, \gamma\} \|(u, w)\|_X \|(v, e)\|_X, \quad \forall (u, w), (v, e) \in X,$$

$$a((u, w), (u, w)) \geq \min\{\nu, \gamma\} \|(u, w)\|_X^2.$$

A forma trilinear $c : Y \times X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, isto é,

$$c((\tilde{u}, d), (u, w), (v, e)) \leq C \|(\tilde{u}, d)\|_Y \|(u, w)\|_X \|(v, e)\|_X, \quad \forall (\tilde{u}, d) \in Y, \quad \forall (u, w), (v, e) \in X,$$

e satisfaz

$$c((\tilde{u}, d), (u, w), (u, w)) = 0, \quad \forall (\tilde{u}, d) \in Y, \quad \forall (u, w) \in X.$$

Demonstração. Para todos $(u, w), (v, e) \in X$,

$$\begin{aligned}
a((u, w), (v, e)) &= a_1(u, v) + \gamma(w, e) \\
&= \nu((u, v)) + \gamma(w, e) \\
&\leq \nu \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \gamma \|w\|_{L^2(\Omega)} \|e\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \max\{\nu, \gamma\} \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \|e\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq \max\{\nu, \gamma\} \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \right) \left(\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|e\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq 2 \max\{\nu, \gamma\} \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|e\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
&= 2 \max\{\nu, \gamma\} \|(u, w)\|_X \|(v, e)\|_X.
\end{aligned}$$

Para todo $(u, w) \in X$,

$$\begin{aligned}
a((u, w), (u, w)) &= \nu \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \gamma \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\geq \min\{\nu, \gamma\} \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
&= \min\{\nu, \gamma\} \|(u, w)\|_X^2.
\end{aligned}$$

Portanto, a forma bilinear $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e coerciva.

Agora, para todos $(\tilde{u}, d) \in Y$, $(u, w), (v, e) \in X$, fazendo uma análise parecida com a análise feita na demonstração do lema 1.1, em [25], mostra-se que

$$\begin{aligned}
c((\tilde{u}, d), (u, w), (v, e)) &= \frac{1}{2} \{c_1(\tilde{u}, u, v) - c_1(\tilde{u}, v, u)\} + \mu \{c_1(u, d, e) - c_1(v, d, w)\} \\
&\leq C \|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|d\|_{W^{1,3}(\Omega)} \|e\|_{L^2(\Omega)} + \\
&\quad + C \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \|d\|_{W^{1,3}(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq C \left(\|\tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} + \|d\|_{W^{1,3}(\Omega)} \right) \left(\|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \right) \left(\|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|e\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq 2C \|(\tilde{u}, d)\|_Y \|(u, w)\|_X \|(v, e)\|_X,
\end{aligned}$$

ou seja, a forma trilinear $c : Y \times X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Finalmente, uma simples substituição em (3.63) basta para ver que, para todos $(\tilde{u}, d) \in Y$ e $(u, w) \in X$,

$$c((\tilde{u}, d), (u, w), (u, w)) = 0,$$

encerrando a demonstração. ■

3.3 Discretização no Espaço e no Tempo

Seja Ω um poliedro conexo, limitado e localmente Lipschitz em \mathbb{R}^N , $N = 2$ ou 3 . Seja $\mathcal{T}_h(\Omega)$ uma família de triangulações admissíveis e regulares de Ω composta por triângulos, se $N = 2$, ou

tetraedros, se $N = 3$.

Para cada passo no tempo, discretizamos u e p com $(\mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{B}) \times \mathbb{P}_1$. Este par satisfaz a condição de *inf-sup* (observação 3.6). As funções d e w são discretizadas com \mathbb{P}_1 e \mathbb{P}_0 , respectivamente. Mais precisamente, considerando (3.11) e (3.12) utilizaremos os espaços de elementos finitos

$$\begin{aligned} U_h &= (\mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{B})^3, \\ U_{0h} &= U_h \cap H_0^1(\Omega), \\ P_h &= \mathbb{P}_1 \cap L_0^2(\Omega), \\ W_h &= (\mathbb{P}_0)^3, \\ D_h &= (\mathbb{P}_1)^3, \\ D_{0h} &= D_h \cap H_0^1(\Omega), \\ V_h &= \left\{ v_h \in U_{0h} \mid \forall q_h \in P_h, \ b(v_h, q_h) = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{3.66}$$

Defina ainda $X_h = U_{0h} \times W_h$ e $M_h = P_h \times D_{0h}$.

A variável temporal é discretizada com intervalos uniformes, isto é, seja T_0 o tempo no qual se quer aproximar a solução e seja $N_0 \geq 2$ o número de intervalos, então

$$k = \frac{T_0}{N_0} \text{ e } t_n = nk, \ 0 \leq n \leq N_0. \tag{3.67}$$

Para uma sequência (v^n) , defina a diferença finita

$$\delta_t v^n = \frac{1}{k}(v^n - v^{n-1}). \tag{3.68}$$

Definamos um *lifting* discreto da condição de contorno l . Como Ω é um poliedro, o traço de $\mathcal{T}_h(\Omega)$ define uma triangulação $\partial\mathcal{T}_h(\Omega)$ de $\partial\Omega$.

Como, por hipótese, $l \in H^1(0, T; H^1(\partial\Omega))$, temos que l é contínua no tempo e também podemos aplicar SZ_h a l . Para cada tempo t_n , defina $l_h^n := SZ_h l(t_n)$. Finalmente, o *lifting* discreto é a solução $\tilde{d}_h^n \in D_h$ do problema

$$\left(\nabla \tilde{d}_h^n, \nabla g_h \right) = 0, \ \forall g_h \in D_h, \quad \text{com} \quad \tilde{d}_h^n \Big|_{\partial\Omega} = l_h^n. \tag{3.69}$$

Para o passo inicial, podemos tomar $u_h^0 \in U_{0h}$ uma aproximação estável em $L^2(\Omega)$ de u_0 , como a projecção ortogonal, por exemplo. Tomamos $d_h^0 = SZ_h d_0$ e definimos $\hat{d}_h^0 = d_h^0 - \tilde{d}_h^0$, assim, d_h^0 e \hat{d}_h^0 são aproximações estáveis em $H^1(\Omega)$ de d_0 e \hat{d}_0 , respectivamente.

Introduzimos agora o esquema totalmente discreto, isto é, a discretização no espaço e no tempo do problema 3. O passo n no tempo ($n \geq 1$) é: conhecendo $(u_h^{n-1}, \hat{d}_h^{n-1}) \in U_{0h} \times D_{0h}$, onde

$d_h^{n-1} = \hat{d}_h^{n-1} + \tilde{d}_h^{n-1}$, encontre $(u_h^n, w_h^n) \in X_h$ e $(p_h^n, \hat{d}_h^n) \in M_h$, onde $d_h^n = \hat{d}_h^n + \tilde{d}_h^n$, solução de

$$\begin{aligned} & \left(\delta_t(u_h^n, \mu \hat{d}_h^n), (v, e) \right) + a\left((u_h^n, w_h^n), (v, e)\right) + b(v, p_h^n) + \\ & + c\left((u_h^{n-1}, d_h^{n-1}), (u_h^n, w_h^n), (v, e)\right) = -\mu \left(\gamma \tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n, e \right), \quad \forall (v, e) \in X_h, \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$b(u_h^n, q) + \mu \left(\nabla \hat{d}_h^n, \nabla g \right) = (w_h^n, g), \quad \forall (q, g) \in M_h, \quad (3.71)$$

ou, equivalentemente, determinar (u_h^n, w_h^n) e (p_h^n, \hat{d}_h^n) , com $d_h^n|_{\partial\Omega} = l_h^n$, tais que

$$\begin{aligned} & \left(\delta_t(u_h^n, \mu \hat{d}_h^n), (v, e) \right) + a\left((u_h^n, w_h^n), (v, e)\right) + b(v, p_h^n) + \\ & + c\left((u_h^{n-1}, d_h^{n-1}), (u_h^n, w_h^n), (v, e)\right) = -\mu \left(\gamma \tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}), e \right), \quad \forall (v, e) \in X_h, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$b(u_h^n, q) + \mu \left(\nabla \hat{d}_h^n, \nabla g \right) = (w_h^n, g), \quad \forall (q, g) \in M_h. \quad (3.73)$$

Note que (3.70)-(3.71) é um sistema linear quadrado nas variáveis u_h^n, w_h^n, p_h^n e \hat{d}_h^n . Como, em dimensão finita, uma transformação linear entre dois espaços vetoriais de mesma dimensão é injetiva se, e somente se, é sobrejetiva, temos que a unicidade de solução implica a existência de solução para (3.70)-(3.71).

Para verificar a unicidade de solução, suponha que $(u_{h1}^n, w_{h1}^n, p_{h1}^n, \hat{d}_{h1}^n)$ e $(u_{h2}^n, w_{h2}^n, p_{h2}^n, \hat{d}_{h2}^n)$ são soluções de (3.70)-(3.71). Defina $(\bar{u}_h^n, \bar{w}_h^n, \bar{p}_h^n, \bar{d}_h^n) = (u_{h1}^n, w_{h1}^n, p_{h1}^n, \hat{d}_{h1}^n) - (u_{h2}^n, w_{h2}^n, p_{h2}^n, \hat{d}_{h2}^n)$, então, subtraindo o sistema com $(u_{h2}^n, w_{h2}^n, p_{h2}^n, \hat{d}_{h2}^n)$ do sistema com $(u_{h1}^n, w_{h1}^n, p_{h1}^n, \hat{d}_{h1}^n)$ obtemos

$$\begin{aligned} & \left(\delta_t(\bar{u}_h^n, \mu \bar{d}_h^n), (v, e) \right) + a\left((\bar{u}_h^n, \bar{w}_h^n), (v, e)\right) + b(v, \bar{p}_h^n) + \\ & + c\left((u_h^{n-1}, d_h^{n-1}), (\bar{u}_h^n, \bar{w}_h^n), (v, e)\right) = 0, \quad \forall (v, e) \in X_h, \end{aligned} \quad (3.74)$$

$$b(\bar{u}_h^n, q) + \mu \left(\nabla \bar{d}_h^n, \nabla g \right) = (\bar{w}_h^n, g), \quad \forall (q, g) \in M_h. \quad (3.75)$$

Agora, utilizando $(\bar{u}_h^n, \bar{w}_h^n) \in X_h$ e $(-\bar{p}_h^n, \mu \delta_t \bar{d}_h^n) \in M_h$ como funções teste e somando (3.74) e (3.75) obtemos

$$(\delta_t \bar{u}_h^n, \bar{u}_h^n) + a\left((\bar{u}_h^n, \bar{w}_h^n), (\bar{u}_h^n, \bar{w}_h^n)\right) + \mu^2 \left(\delta_t \nabla \bar{d}_h^n, \nabla \bar{d}_h^n \right) = 0 \quad (3.76)$$

Como $(u_{h1}^n, w_{h1}^n, p_{h1}^n, \hat{d}_{h1}^n)$ e $(u_{h2}^n, w_{h2}^n, p_{h2}^n, \hat{d}_{h2}^n)$ são soluções de (3.70)-(3.71), com

$$u_{h1}^{n-1} = u_{h2}^{n-1} = u_h^{n-1} \text{ e } \hat{d}_{h1}^{n-1} = \hat{d}_{h2}^{n-1} = \hat{d}_h^{n-1}$$

temos que $\bar{u}_h^{n-1} = 0$ e $\nabla \bar{d}_h^{n-1} = 0$, de onde

$$\|\bar{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \min\{\nu, \gamma\} \|(\bar{u}_h^n, \bar{w}_h^n)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 \|\nabla \bar{d}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0.$$

Logo, temos unicidade de u_h^n, \hat{d}_h^n e w_h^n .

Uma vez demonstrado que $\bar{u}_h^n = 0, \bar{d}_h^n = 0$ e $\bar{w}_h^n = 0$, temos, de (3.74) que

$$b(v, \bar{p}_h^n) = 0, \quad \forall v \in U_{h0}(\Omega).$$

Como a forma bilinear b satisfaz a condição de *inf-sup* para os espaços U_{h0} e P_h , temos que B_h^T é um isomorfismo de P_h em V_h^0 e

$$k_0 \|\bar{p}_h^n\|_{P_h} \leq \sup_{v_h \in U_{h0}} \frac{b(v_h, \bar{p}_h^n)}{\|v_h\|_{U_{h0}}} = 0.$$

Portanto, temos unicidade da solução $(u_h^n, w_h^n, p_h, \hat{d}_h^n)$ de (3.70)-(3.71) e, então, também temos a existência de solução.

Visando estudar a convergência do método é preciso estabelecer algumas estimativas *a priori* sobre u_h^n , \hat{d}_h^n e w_h^n .

Lema 3.4. *Existe uma constante $C = C(\Omega, \nu, \gamma, \lambda, \|(u_0, d_0)\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}, l, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$\sup_{0 \leq n \leq N_0} \|(u_h^n, \hat{d}_h^n)\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} \leq C, \quad (3.77)$$

$$k \sum_{n=1}^{N_0} \|(u_h^n, w_h^n)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} \leq C, \quad (3.78)$$

$$\sum_{n=1}^{N_0} \|(u_h^n - u_h^{n-1}, \hat{d}_h^n - \hat{d}_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} \leq C. \quad (3.79)$$

Demonstração. Analogamente ao que foi feito para se obter a unicidade de solução para (3.70)-(3.71), tome $(v, e) = (u_h^n, w_h^n) \in X_h$ em (3.70), $(q, g) = (-p_h^n, \mu \delta_t \hat{d}_h^n) \in M_h$ em (3.71) e some as equações. Obtemos

$$\begin{aligned} (\delta_t u_h^n, u_h^n) + a((u_h^n, w_h^n), (u_h^n, w_h^n)) + \mu^2 (\delta_t \nabla \hat{d}_h^n, \nabla \hat{d}_h^n) = \\ = -\mu \gamma \left(\left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right), w_h^n \right). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Sejam $a, b \in L^2(\Omega)$, então

$$2(a - b, a) = \|a\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|b\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|a - b\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.81)$$

Esta é uma identidade bastante utilizada quando aparecem termos como $(\delta_t u_h^n, u_h^n)$ e $(\delta_t \nabla \hat{d}_h^n, \nabla \hat{d}_h^n)$ e pode ser encontrada na seção 4 do capítulo 3 do livro de Temam [25].

Utilizando a identidade (3.81), a coercividade da forma a e a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.80) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k} \left[\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \min\{\nu, \gamma\} \|(u_h^n, w_h^n)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 + \\ + \frac{\mu^2}{2k} \left[\|\nabla \hat{d}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|\nabla \hat{d}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \hat{d}_h^n - \nabla \hat{d}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq \\ \leq \gamma \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Analisando apenas o termo do lado direito da desigualdade anterior, podemos utilizar a desigualdade de Young para obter

$$\gamma \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\gamma}{2} \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2$$

ou

$$\begin{aligned} \gamma \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)} &= \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left\| \mu \gamma \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\nu} \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{\gamma^2}{2\nu} \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \gamma \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)} \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2} \max \left\{ \gamma, \frac{\gamma^2}{\nu} \right\} \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &\quad + \frac{\min \{ \nu, \gamma \}}{2} \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \max \left\{ \gamma, \frac{\gamma^2}{\nu} \right\} \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \\ &\quad + \frac{\min \{ \nu, \gamma \}}{2} \|(u_h^n, w_h^n)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned} \|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + k \min \{ \nu, \gamma \} \|(u_h^n, w_h^n)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 + \\ + \mu^2 \left[\left\| \nabla \hat{d}_h^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\| \nabla \hat{d}_h^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \nabla \hat{d}_h^n - \nabla \hat{d}_h^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \leq \\ \leq k \max \left\{ \gamma, \frac{\gamma^2}{\nu} \right\} \left\| \mu \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ \leq kC(\nu, \gamma, \lambda) \left[\left\| \tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \delta_t \tilde{d}_h^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \end{aligned}$$

Agora, somando de $n = 1$ a m , $1 \leq m \leq N_0$, obtemos que

$$\begin{aligned} \|u_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + kC(\nu, \gamma) \sum_{n=1}^m \|(u_h^n, w_h^n)\|_{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 + \\ + \mu^2 \left[\left\| \nabla \hat{d}_h^m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\| \nabla \hat{d}_h^0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \mu^2 \sum_{n=1}^m \left\| \nabla \hat{d}_h^n - \nabla \hat{d}_h^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ \leq kC(\nu, \gamma, \lambda) \sum_{n=1}^{N_0} \left\| \tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + kC(\nu, \gamma, \lambda) \sum_{n=1}^{N_0} \left\| \delta_t \tilde{d}_h^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq n \leq N_0} \left\| (u_h^n, \hat{d}_h^n) \right\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} C(\Omega, \nu, \gamma, \lambda, \|(u_0, d_0)\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}, T_0) + \\ &\quad + C(\Omega, \nu, \gamma, \lambda, \|(u_0, d_0)\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}, l) = \\ &= C(\Omega, \nu, \gamma, \lambda, \|(u_0, d_0)\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}, l, \varepsilon, T_0), \end{aligned}$$

ou seja, fica demonstrada (3.77). Tomando $m = N_0$, obtemos (3.78) e (3.79), com a mesma constante de (3.77), concluindo a demonstração. ■

Observação 3.9. Note que a constante C das limitações do lema 3.4 é proporcional a $1/\varepsilon^2$. □

Observação 3.10. Podemos obter uma limitação para $\|d_h^n\|_{H^1(\Omega)}$. De fato, como

$$\left\| \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1 \|l(t_n)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C_2 \|l(t_n)\|_{H^1(\partial\Omega)} \leq C_2 \|l\|_{L^\infty(0,T;H^1(\partial\Omega))},$$

concluimos de (3.77) que

$$\sup_{0 \leq n \leq N_0} \|d_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C,$$

onde a constante C tem as mesmas dependências da constante C do lema 3.4, inclusive em relação a $1/\varepsilon^2$. □

Ainda precisamos de estimativas *a priori* sobre \hat{d}_h^n em uma norma mais forte que $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$. A norma de $W^{1,3}(\Omega)$ é suficiente.

Lema 3.5. *Existe uma constante $C = C(\Omega, \nu, \gamma, \lambda, \|(u_0, d_0)\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}, l, \varepsilon) > 0$ tal que*

$$k \sum_{n=1}^{N_0} \left\| \hat{d}_h^n \right\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq C, \quad (3.82)$$

$$k \sum_{n=1}^{N_0} \|d_h^n\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq C. \quad (3.83)$$

A demonstração do lema 3.5 requer o seguinte lema no qual gostaríamos de utilizar a desigualdade inversa

$$\|\nabla d_h\|_{L^3(\Omega)} \leq Ch^{1/2} \|\nabla d_h\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.84)$$

que decorre do teorema 3.2.6, no capítulo 3 do livro de Ciarlet [6]. Então, é preciso supor que a família de triangulações é quasi-uniforme.

Lema 3.6. *Existe uma constante $C > 0$ (independente de h e k), tal que, para cada $n \geq 1$, dado w_h^n , a solução \hat{d}_h^n da equação (3.71) satisfaz*

$$\left\| \hat{d}_h^n \right\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração. Para verificar que

$$\left\| \hat{d}_h^n \right\|_{L^3(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)}$$

note que

$$\mu \left(\nabla \hat{d}_h^n, \nabla g \right) = \left(w_h^n, g \right), \quad \forall g \in D_{h0},$$

por (3.71). Então

$$\mu \left\| \hat{d}_h^n \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq C \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)} \left\| \hat{d}_h^n \right\|_{H_0^1(\Omega)},$$

de onde segue que

$$\left\| \hat{d}_h^n \right\|_{L^3(\Omega)} \leq C \left\| \hat{d}_h^n \right\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)}$$

pelas imersões de Sobolev (1.11).

Resta-nos estimar a norma do gradiente. Seja $w_h^n \in W_h$ e considere $\hat{d}_h \in H^1(\Omega)$ solução de

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \hat{d}_h &= w_h^n \\ \hat{d}_h|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Do teorema 2.1 temos que $\hat{d}_h \in H^{3/2}(\Omega)$ e

$$\left\| \hat{d}_h \right\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^{3/2}(\Omega)}.$$

Então, temos que

$$\left\| \hat{d}_h \right\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^{3/2}(\Omega)}. \quad (3.85)$$

Separe $\|\nabla d_h^n\|_{L^3(\Omega)}$ em

$$\|\nabla d_h^n\|_{L^3(\Omega)} \leq \left\| \nabla (\hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h) \right\|_{L^3(\Omega)} + \left\| \nabla (SZ_h \hat{d}_h - \hat{d}_h) \right\|_{L^3(\Omega)} + \left\| \nabla \hat{d}_h \right\|_{L^3(\Omega)}.$$

O último termo do lado direito é limitado por $C \|w_h^n\|_{L^3(\Omega)}$, por (3.85). O segundo termo também tem esta limitação por causa de (3.85) e por causa da estabilidade de SZ_h , de fato,

$$\left\| \nabla (SZ_h \hat{d}_h - \hat{d}_h) \right\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq C \left\| \hat{d}_h \right\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^{3/2}(\Omega)}.$$

Portanto, resta-nos estimar o primeiro termo,

$$\left\| \nabla (\hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h) \right\|_{L^3(\Omega)}.$$

Das equações que \hat{d}_h^n e \hat{d}_h satisfazem obtemos que

$$\left(\nabla (\hat{d}_h^n - \hat{d}_h), \nabla g \right) = 0, \quad \forall g \in D_{0h}.$$

Então, tomando $g = \hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h$

$$\left(\nabla (\hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h), \nabla (\hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h) \right) = \left(\nabla (\hat{d}_h - SZ_h \hat{d}_h), \nabla (\hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h) \right),$$

de onde

$$\begin{aligned} \left\| \nabla(\hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h) \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \left\| \nabla(\hat{d}_h - SZ_h \hat{d}_h) \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq Ch^{1/2} \left\| \hat{d}_h \right\|_{H^{3/2}(\Omega)} \\ &\leq Ch^{1/2} \|w_h^n\|_{L^{3/2}}. \end{aligned}$$

Daí, pela desigualdade inversa (3.84),

$$\left\| \nabla(\hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h) \right\|_{L^3(\Omega)} \leq Ch^{-1/2} \left\| \nabla(\hat{d}_h^n - SZ_h \hat{d}_h) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^3(\Omega)},$$

concluindo a demonstração. ■

Observação 3.11. Note que se w_h^n fosse justamente $\Delta \hat{d}_h^n$ teríamos diretamente que

$$\left\| \hat{d}_h^n \right\|_{W^{1,3}(\Omega)} \leq C \left\| \hat{d}_h^n \right\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^{3/2}(\Omega)} \leq C \|w_h^n\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Demonstração do lema 3.5. A limitação (3.82) segue diretamente do lema 3.6 e de (3.78).

Para obter (3.83), basta mostrar que

$$k \sum_{n=1}^{n_0} \left\| \tilde{d}_h^n \right\|_{W^{1,3}(\Omega)}^2 \leq C$$

e juntar com (3.82). Para mostrar tal desigualdade, podemos proceder como na demonstração no lema 3.6, mas definindo \tilde{d}_h como solução de

$$\begin{aligned} -\mu \Delta \tilde{d}_h &= 0 \\ \tilde{d}_h|_{\partial\Omega} &= l_h^n \end{aligned}$$

e usando que

$$\left\| \tilde{d}_h \right\|_{H^{3/2}(\Omega)} \leq C \|l_h^n\|_{H^1(\partial\Omega)} \leq \|l(t_n)\|_{H^1(\partial\Omega)}.$$

Assim, concluímos a demonstração do lema 3.5. ■

3.4 Convergência do Esquema Totalmente Discreto

Seguindo as ideias das seções 4 e 6 do capítulo 3 do livro de Temam [25], a fim de estudar a convergência do esquema (3.70)-(3.71) podemos associar às funções u_h^n , d_h^n e w_h^n , soluções de (3.70)-(3.71), algumas funções convenientes. Defina as funções afins em cada intervalo $[t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq N_0$, $u_{hk} \in C([0, T], H_0^1(\Omega))$ e $d_{hk} \in C([0, T], H^1(\Omega))$ tais que $u_{hk}(t_n) = u_h^n$ e $d_{hk}(t_n) = d_h^n$, $0 \leq n \leq N_0$. Temos que

$$u_{hk}(t) \Big|_{[t_{n-1}, t_n]} = \frac{(t - t_{n-1})}{k} u_h^n + \left(1 - \frac{(t - t_{n-1})}{k}\right) u_h^{n-1} \quad (3.86)$$

$$d_{hk}(t) \Big|_{[t_{n-1}, t_n]} = \frac{(t - t_{n-1})}{k} d_h^n + \left(1 - \frac{(t - t_{n-1})}{k}\right) d_h^{n-1}. \quad (3.87)$$

Analogamente, defina as funções contínuas \hat{d}_{hk} e \tilde{d}_{hk} . Considere também as funções constantes em cada intervalo (t_{n-1}, t_n) , u_{hk}^r , u_{hk}^l , d_{hk}^r e d_{hk}^l , definidas como

$$(u_{hk}^r(t), d_{hk}^r(t)) \Big|_{[t_{n-1}, t_n]} = (u_h^n, d_h^n) \quad (3.88)$$

$$(u_{hk}^l(t), d_{hk}^l(t)) \Big|_{[t_{n-1}, t_n]} = (u_h^{n-1}, d_h^{n-1}). \quad (3.89)$$

Definimos assim, também, as funções constantes por partes w_{hk}^r , \hat{d}_{hk}^r , \tilde{d}_{hk}^r , \hat{d}_{hk}^l e \tilde{d}_{hk}^l . Com essas funções, podemos reescrever (3.70)-(3.71) como

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt}(u_{hk}, \mu \hat{d}_{hk}), (v_h, e_h) \right) + a(u_{hk}^r, w_{hk}^r, (v_h, e_h)) + \\ & \quad + c(u_{hk}^l, d_{hk}^l, (u_{hk}^r, d_{hk}^r), (v_h, e_h)) = \\ & = -\mu \left(\gamma \tilde{f}_\varepsilon(d_{hk}^l) + \frac{d}{dt} \tilde{d}_{hk}, e_h \right), \quad \forall (v_h, e_h) \in V_h \times W_h, \end{aligned} \quad (3.90)$$

$$b(u_{hk}^r, q_h) + \mu \left(\nabla \hat{d}_{hk}^r, \nabla g_h \right) - (w_{hk}^r, g_h) = 0, \quad \forall (q_h, g_h) \in M_h. \quad (3.91)$$

Decorre do lema 3.4 que

$$u_{hk}, u_{hk}^r \text{ e } u_{hk}^l \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.92)$$

$$\hat{d}_{hk}, \hat{d}_{hk}^r \text{ e } \hat{d}_{hk}^l \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)), \quad (3.93)$$

$$u_{hk}^r \text{ é limitada em } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.94)$$

$$w_{hk}^r \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Omega)) \quad (3.95)$$

e, de acordo com a observação 3.10,

$$d_{hk}, d_{hk}^r \text{ e } d_{hk}^l \text{ são limitadas em } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)). \quad (3.96)$$

Ainda decorre do lema 3.4 que

$$\left\| (u_{hk}^r - u_{hk}^l, \hat{d}_{hk}^r - \hat{d}_{hk}^l) \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega))} \leq Ck^{1/2} \quad (3.97)$$

$$\left\| (u_{hk}^r - u_{hk}, \hat{d}_{hk}^r - \hat{d}_{hk}) \right\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega))} \leq Ck^{1/2}. \quad (3.98)$$

E do lema 3.6 decorre que

$$\hat{d}_{hk}^r \text{ e } d_{hk}^r \text{ são limitadas em } L^2(0, T; W^{1,3}(\Omega)). \quad (3.99)$$

As limitações obtidas acima são uniformes em h e k , isto é, não dependem de h e k , mas dependem de $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Dessas limitações independentes de h e k e das proposições 1.9 e 1.10 temos que existe

uma subsequência de (h, k) , ainda denotada por (h, k) , e existem (u^r, \hat{d}^r) , (u^l, \hat{d}^l) e (u, \hat{d}) e w tais que, quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$,

$$(u_{hk}^r, \hat{d}_{hk}^r) \longrightarrow (u^r, \hat{d}^r) \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)), \quad (3.100)$$

$$(u_{hk}^l, \hat{d}_{hk}^l) \longrightarrow (u^l, \hat{d}^l) \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)), \quad (3.101)$$

$$(u_{hk}, \hat{d}_{hk}) \longrightarrow (u, \hat{d}) \text{ fraco}^* \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)), \quad (3.102)$$

$$(u_{hk}^r, \hat{w}_{hk}^r) \longrightarrow (u^r, w) \text{ fraco em } L^2(0, T; H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)). \quad (3.103)$$

As estimativas (3.97) e (3.98) implicam que

$$u^r = u^l = u \quad \text{e} \quad \hat{d}^r = \hat{d}^l = \hat{d}.$$

Como as sequências \tilde{d}_{hk}^r , \tilde{d}_{hk}^l e \tilde{d}_{hk} também são limitadas em $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ as convergências (3.100), (3.101) e (3.102) valem para as sequências d_{hk}^r , d_{hk}^l e d_{hk} .

Finalmente, segue das convergências mencionadas e de (3.99) que

$$\hat{d}_{hk}^r \longrightarrow \hat{d} \text{ fraco em } L^2(0, T; W^{1,3}(\Omega)). \quad (3.104)$$

Assim como foi feito para as equações de Navier-Stokes na seção 6 do capítulo 3 do livro de Temam [25], podemos escrever (3.90)-(3.91) como

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\frac{d}{dt}(u_{hk}, \mu \hat{d}_{hk}), (v_h, e_h) \right) \psi(t) dt + \int_0^T a((u_{hk}^r, w_{hk}^r), (v_h, e_h)) \psi(t) dt + \\ & \quad + \int_0^T c((u_{hk}^l, d_{hk}^l), (u_{hk}^r, d_{hk}^r), (v_h, e_h)) \psi(t) dt = \\ & = -\mu \int_0^T \left(\gamma \tilde{f}_\varepsilon(d_{hk}^l) + \frac{d}{dt} \tilde{d}_{hk}, e_h \right) \psi(t) dt, \quad \forall (v_h, e_h) \in V_h \times W_h, \quad \forall \psi \in C_c^\infty((0, T)), \end{aligned}$$

e as convergências fracas (3.100)-(3.104) são suficientes para se passar ao limite nos termos bilineares de (3.90)-(3.91). De fato, considere o termo

$$\int_0^T a((u_{hk}^r, w_{hk}^r), (v_h, e_h)) \psi(t) dt,$$

por exemplo. Dado $(v, e) \in V \times L^2(\Omega)$, temos que $(I_h v, K_h e) \in V_h \times W_h$ e

$$(I_h v, K_h e) \longrightarrow (v, e) \text{ forte em } H^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

de onde segue que

$$(I_h v, K_h e) \psi \longrightarrow (v, e) \psi \text{ forte em } L^2(0, T; H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)).$$

Temos que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T a((u_{hk}^r, w_{hk}^r), (I_h v, K_h e)) \psi(t) dt - \int_0^T a((u, w), (v, e)) \psi(t) dt \right| = \\ & = \left| \int_0^T a((u_{hk}^r, w_{hk}^r), (I_h v - v, K_h e - e)) \psi(t) dt + \int_0^T a((u_{hk}^r - u, w_{hk}^r - w), (v, e)) \psi(t) dt \right| \leq \\ & \leq \int_0^T \left| a((u_{hk}^r, w_{hk}^r), (I_h v - v, K_h e - e)) \psi(t) \right| dt + \left| \int_0^T a((u_{hk}^r - u, w_{hk}^r - w), (v, e)) \psi(t) dt \right|. \end{aligned}$$

Da convergência fraca (3.103) decorre que o segundo termo da última desigualdade tende para zero quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. E da convergência forte de $(I_h v, K_h e)\psi$ para $(v, e)\psi$ segue que o primeiro termo também tem limite igual a zero, uma vez que a sequência (u_{hk}^r, w_{hk}^r) é limitada em $L^2(0, T; H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))$, pois converge fracamente. Analogamente para os outros termos bilineares, com destaque para a passagem ao limite em (3.91) que nos dá

$$b(u, q) + \mu \left(\nabla \hat{d}, \nabla g \right) - (w, g) = 0, \quad \forall (q, g) \in M,$$

isto é, (u, \hat{d}, w) satisfaz (3.65).

Para os termos trilineares, relacionados aos termos não lineares da EDP, precisamos de resultados de compacidade no tempo de u_h^n e d_h^n .

Proposição 3.11. *Existe uma constante $C > 0$, independente de h e de k mas dependente de $\frac{1}{\varepsilon^2}$ tal que, para todo inteiro l com $1 \leq l \leq N_0 - 1$,*

$$k \sum_{n=1}^{N_0-l} \left\| (u_h^{n+l} - u_h^n, \mu(\hat{d}_h^{n+l} - \hat{d}_h^n)) \right\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}^2 \leq C(lk)^{1/2}. \quad (3.105)$$

Demonstração. Some (3.70) de $m+1$ a $m+l$ e tome $(v_h, e_h) = (u_h^{m+l} - u_h^m, w_h^{m+l} - w_h^m)$ como função teste. De (3.71) temos que

$$\mu \left(\nabla(\hat{d}_h^{m+l} - \hat{d}_h^m), \nabla g \right) = (w_h^{m+l} - w_h^m, g), \quad b(u_h^{m+l} - u_h^m, q) = 0,$$

logo, substituindo as funções teste convenientes,

$$\left(\mu(\hat{d}_h^{m+l} - \hat{d}_h^m), w_h^{m+l} - w_h^m \right) = \left\| \mu \nabla(\hat{d}_h^{m+l} - \hat{d}_h^m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$\sum_{n=m+1}^{m+l} b(u_h^{m+l} - u_h^m, p_h^n) = 0.$$

Obtemos, então,

$$\begin{aligned}
& \left\| (u_h^{m+l} - u_h^m, \mu(d_h^{m+l} - d_h^m)) \right\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}^2 = \\
& = -k \sum_{n=m+1}^{m+l} a\left((u_h^n, w_h^n), (u_h^{m+l} - u_h^m, w_h^{m+l} - w_h^m)\right) + \\
& -k \sum_{n=m+1}^{m+l} c\left((u_h^{n-1}, d_h^{n-1}), (u_h^n, w_h^n), (u_h^{m+l} - u_h^m, w_h^{m+l} - w_h^m)\right) + \\
& -k\mu \sum_{n=m+1}^{m+l} \left(\gamma \tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) + \delta_t \tilde{d}_h^n, w_h^{m+l} - w_h^m \right).
\end{aligned}$$

O resultado é obtido ao estimar os termos do lado direito da igualdade.

Multiplique a equação acima por k e some em m de 1 a $N_0 - l$. Vamos inverter a ordem do somatório, agora n vai de 2 a N_0 e m vai de $\max\{1, n-l\}$ a $\min\{n-1, N_0-l\}$. Para os termos de

$$-k^2 \sum_{n=m+1}^{m+l} a\left((u_h^n, w_h^n), (u_h^{m+l} - u_h^m, w_h^{m+l} - w_h^m)\right)$$

que envolvem a forma bilinear a_1 temos

$$\begin{aligned}
& k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \nu \left(\nabla u_h^n, \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right) \right| \leq \\
& \leq k^2 \nu \sum_{n=2}^{N_0} \|\nabla u_h^n\|_{L^2(\Omega)} \sum_{m=\max\{1, n-l\}}^{\min\{n-1, N_0-l\}} \|\nabla(u_h^{m+l} - u_h^m)\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz nos somatórios encontramos a relação entre a soma dos quadrados e o quadrado da soma, daí,

$$\begin{aligned}
& k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \nu \left(\nabla u_h^n, \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right) \right| \leq \nu \left(k(\min\{n-1, N_0-l\} - \max\{1, n-l\}) \right)^{1/2} \times \\
& \times (k(N_0-1))^{1/2} \left(\sum_{n=2}^{N_0} k \|\nabla u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{N_0-l} k \|\nabla(u_h^{m+l} - u_h^m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Como

$$\min\{n-1, N_0-l\} - \max\{1, n-l\} \leq n-1 - (n-l) = l-1,$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \nu \left(\nabla u_h^n, \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right) \right| \leq \nu \left(k(l-1) \right)^{1/2} (k(N_0-1))^{1/2} \times \\
& \times \left(\sum_{n=2}^{N_0} k \|\nabla u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{N_0-l} k \|\nabla(u_h^{m+l} - u_h^m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Então, de (3.78) e $k(N_0 - 1) \leq kN_0 = T_0$ temos que

$$k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \nu \left(\nabla u_h^n, \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right) \right| \leq C\nu(kl)^{1/2}T_0^{1/2}.$$

A estimativa para os termos que envolvem a forma bilinear a_2 é análoga. Basicamente, trocamos ∇u_h^i por w_h^i e obtemos

$$k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \gamma \left(w_h^n, w_h^{m+l} - w_h^m \right) \right| \leq C\gamma(kl)^{1/2}T_0^{1/2}.$$

Para o termo que envolve a forma trilinear \tilde{c}_1 , usando a desigualdade de Hölder, imersões de Sobolev, a desigualdade de Young e o lema 3.4 obtemos

$$\begin{aligned} & k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \left(u_h^{n-1} \cdot \nabla u_h^n, u_h^{m+l} - u_h^m \right) \right| \leq \\ & \leq k^2 \sum_{n=2}^{N_0} C \left\| \nabla u_h^{n-1} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \nabla u_h^n \right\|_{L^2(\Omega)} \sum_{m=\max\{1, n-l\}}^{\min\{n-1, N_0-l\}} \left\| \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ & \leq kC \left(\sum_{n=1}^{N_0-1} \left\| \nabla u_h^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=2}^{N_0} \left\| \nabla u_h^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) k \sum_{m=\max\{1, n-l\}}^{\min\{n-1, N_0-l\}} \left\| \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ & \leq C(k(l-1))^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{N_0-l} k \left\| \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(k(l-1))^{1/2}. \end{aligned}$$

Para o termo que envolve a forma trilinear c_1 o raciocínio é análogo,

$$\begin{aligned} & k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \left((\nabla d_h^{n-1})^T w_h^n, u_h^{m+l} - u_h^m \right) \right| \leq \\ & \leq kC \left(\sum_{n=1}^{N_0-1} \left\| \nabla d_h^n \right\|_{L^3(\Omega)}^2 + \sum_{n=2}^{N_0} \left\| w_h^n \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) k \sum_{m=\max\{1, n-l\}}^{\min\{n-1, N_0-l\}} \left\| \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ & \leq C(k(l-1))^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{N_0-l} k \left\| \nabla(u_h^{m+l} - u_h^m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C(k(l-1))^{1/2}, \end{aligned}$$

Dessa vez foram utilizados os lemas 3.4 e 3.5 para obter a constante independente de k e h . E assim fazemos para obter

$$k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \left(u_h^n \cdot \nabla d_h^{n-1}, w_h^{m+l} - w_h^m \right) \right| \leq C(k(l-1))^{1/2}.$$

Para o termo que envolve \tilde{f}_ε utilizamos (2.33),

$$\begin{aligned} & \mu k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \gamma \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}), w_h^{m+l} - w_h^m \right) \right| \leq \\ & \leq k^2 \nu \sum_{n=2}^{N_0} \left\| \tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega)} \sum_{m=\max\{1, n-l\}}^{\min\{n-1, N_0-l\}} \left\| \nabla(w_h^{m+l} - w_h^m) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ & \leq \mu \gamma \frac{|\Omega|^{1/2}}{\varepsilon^2} T_0 \left(k(l-1) \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{N_0-l} k \left\| \nabla(w_h^{m+l} - w_h^m) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq C \left(k(l-1) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

E para o termo que envolve $\delta_t \tilde{d}_h^n$ a limitação é muito parecida com a dos termos envolvendo a forma bilinear a . Com algumas contas obtemos

$$\mu k^2 \left| \sum_{m=1}^{N_0-l} \sum_{n=m+1}^{m+l} \gamma \left(\delta_t \tilde{d}_h^n, w_h^{m+l} - w_h^m \right) \right| \leq C \left(k(l-1) \right)^{1/2}.$$

Então, juntando as estimativas obtidas para cada termo obtemos o resultado enunciado. ■

Teorema 3.1. *A sequência de soluções $(u_{hk}^r, \hat{d}_{hk}^r)$ é um conjunto pré-compacto em $L^2(0, T; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$, isto é, possui uma subsequência convergente na topologia forte de $L^2(0, T; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$, se existe uma constante $C > 0$ independente de h e de k tal que*

$$\int_0^{T-\delta} \left\| \left(u_{hk}^r(t+\delta) - u_{hk}^r(t), \mu(\hat{d}_{hk}^r(t+\delta) - \hat{d}_{hk}^r(t)) \right) \right\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} dt \leq C \delta^{1/2}, \quad (3.106)$$

para todo $\delta \in (0, T)$.

Demonstração. O resultado segue da caracterização de conjuntos compactos em $L^p(0, T; B)$, onde B é um espaço de Banach, dada pelo teorema 1 do artigo de Simon [24]. Tal resultado nos diz que um subconjunto F de $L^p(0, T; B)$ é pré-compacto se, e somente se, o conjunto

$$\left\{ \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt \mid f \in F \right\},$$

para quaisquer $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T$, é pré-compacto em B e

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T-\delta} \|f(t+\delta) - f(t)\|_B^p dt = 0$$

uniformemente em δ .

Temos que $(u_{hk}^r, \hat{d}_{hk}^r)$ é limitado em $L^2(0, T; H^1(\Omega) \times H^1(\Omega))$, logo, o conjunto

$$\left\{ \int_{t_1}^{t_2} (u_{hk}^r(t), \hat{d}_{hk}^r(t)) dt \right\},$$

é pré-compacto em $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Além disso, se vale (3.106) então podemos concluir que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{T-\delta} \left\| \left(u_{hk}^r(t+\delta) - u_{hk}^r(t), \mu(\hat{d}_{hk}^r(t+\delta) - \hat{d}_{hk}^r(t)) \right) \right\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2 dt = 0$$

uniformemente em δ e segue que $(u_{hk}^r, \hat{d}_{hk}^r)$ é um conjunto pré-compacto em $L^2(0, T; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$. ■

Corolário 3.1. *Segue da proposição 3.11 que a sequência de soluções $(u_{hk}^r, \hat{d}_{hk}^r)$ é um pré-compacto em $L^2(0, T; L^2(\Omega) \times L^2(\Omega))$.*

Demonstração. Mostraremos que vale (3.106) para todo $\delta \in (0, T)$ e, então, o resultado decorre do teorema 3.1. Basta fazer as contas para \hat{d}_{hk}^r , pois as contas são as mesmas para u_{hk}^r e \hat{d}_{hk}^r .

Caso $\delta \in (0, k)$, dada $f \in L^1(0, T)$, separe a integral como segue:

$$\int_0^{T_0-\delta} f(t) dt = \sum_{i=0}^{N_0-2} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}-\delta} f(t) dt + \int_{t_{i+1}-\delta}^{t_{i+1}} f(t) dt \right) + \int_{t_{N_0-1}}^{t_{N_0}-\delta} f(t) dt.$$

Como $\delta \in (0, k)$, temos que

$$\left\| \hat{d}_{hk}^r(t + \delta) - \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \Big|_{(t_i, t_{i+1}-\delta)} = 0,$$

logo,

$$\int_0^{T_0-\delta} \left\| \hat{d}_{hk}^r(t + \delta) - \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt = \delta \sum_{i=1}^{N_0-1} \left\| \hat{d}_h^{i+1} - \hat{d}_h^i \right\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Segue de (3.77) que

$$\int_0^{T_0-\delta} \left\| \hat{d}_{hk}^r(t + \delta) - \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C\delta$$

e, como $0 < \delta < k < 1$, temos que (3.106) vale para $\delta \in (0, k)$.

Caso $\delta = lk$, para um inteiro l tal que $1 \leq l \leq N_0 - 1$, dada $f \in L^1(0, T)$, temos que

$$\int_0^{T_0-lk} f(t) dt = \sum_{i=0}^{N_0-l-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) dt.$$

Então, de (3.105) obtemos

$$\int_0^{T_0-lk} \left\| \hat{d}_{hk}^r(t + lk) - \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt = k \sum_{m=1}^{N_0-l} \left\| \hat{d}_h^{m+l} - \hat{d}_h^m \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq C(lk)^{1/2} = C\delta^{1/2}.$$

O caso restante é aquele no qual $\delta = k(l + \alpha)$, sendo $1 \leq l \leq N_0 - 1$ e $\alpha \in (0, 1)$. Novamente, separamos a integral de uma função $f \in L^1(0, T)$ em

$$\int_0^{T_0-(l+\alpha)k} f(t) dt = \sum_{i=0}^{N_0-1} \left(\int_{t_i}^{t_{i+1}-\alpha k} f(t) dt + \int_{t_{i+1}-\alpha k}^{t_{i+1}} f(t) dt \right) + \int_{t_{N_0-l-\alpha k}}^{t_{N_0-l}} f(t) dt.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0-lk-\alpha k} \left\| \hat{d}_{hk}^r(t + lk) - \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt &= k(1 - \alpha) \sum_{m=1}^{N_0-l} \left\| \hat{d}_h^{m+l} - \hat{d}_h^m \right\|_{H^1(\Omega)}^2 + \\ &+ \alpha k \sum_{m=1}^{N_0-l-1} \left\| \hat{d}_h^{m+l+1} - \hat{d}_h^m \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

e, aplicando (3.105) aos dois somatórios, obtemos

$$\int_0^{T_0-(l+\alpha)k} \left\| \hat{d}_{hk}^r(t + lk) - \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq Ck^{1/2} \left((1 - \alpha)l^{1/2} + \alpha(l + 1)^{1/2} \right).$$

Mas, como $\alpha \in (0, 1)$ e l é um inteiro positivo,

$$\begin{aligned} \left((1 - \alpha)l^{1/2} + \alpha(l + 1)^{1/2} \right)^2 &\leq 2 \left((1 - \alpha)^2 l + \alpha^2 (l + 1) \right) \\ &= 2 \left(l + \alpha^2 l - 2\alpha l + \alpha^2 l + \alpha^2 \right) \\ &\leq 2 \left(l + \alpha l - 2\alpha l + \alpha l + \alpha \right) \\ &= 2(l + \alpha), \end{aligned}$$

isto é,

$$(1 - \alpha)l^{1/2} + \alpha(l + 1)^{1/2} \leq \sqrt{2}(l + \alpha)^{1/2}.$$

Portanto, (3.106) também vale para $\delta = (l + \alpha)k$, com $\alpha \in (0, 1)$, o que conclui a demonstração. ■

Para o termo $(\nabla d_{hk}^r)^T w_{hk}^r, v_h)$ é necessária a compacidade de ∇d_{hk}^r em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, ou seja, a compacidade de d_{hk}^r em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Proposição 3.12. *A sequência d_{hk}^r é pré-compacta em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.*

Demonstração. Mostraremos a compacidade da sequência \hat{d}_{hk}^r em $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ e da sequência \tilde{d}_{hk}^r em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$.

Temos que

$$\begin{aligned} \left\| \hat{d}_{hk}^r - \hat{d} \right\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 &= \int_0^T \left\| \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt - 2 \int_0^T \left(\nabla \hat{d}(t), \nabla \hat{d}_{hk}^r(t) \right) dt + \\ &\quad + \int_0^T \left\| \hat{d}(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt \end{aligned}$$

Segue da convergência fraco estrela (3.100) que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} -2 \int_0^T \left(\nabla \hat{d}(t), \nabla \hat{d}_{hk}^r(t) \right) dt = -2 \int_0^T \left\| \nabla \hat{d} \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt.$$

Tome $g_h = \hat{d}_{hk}^r$ em (3.91), isto é,

$$\mu \int_0^T \left\| \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \left(w_{hk}^r(t), \hat{d}_{hk}^r(t) \right) dt,$$

pela convergência fraca de w_{hk}^r em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ e pela convergência forte de \hat{d}_{hk}^r em $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ temos que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \int_0^T \left(w_{hk}^r(t), \hat{d}_{hk}^r(t) \right) dt = \int_0^T \left(w(t), \hat{d}(t) \right) dt.$$

Como já foi observado, pela passagem ao limite nos termos lineares temos que as funções limite u , \hat{d} e w satisfazem (3.65), ou seja,

$$\int_0^T \left(w(t), \hat{d}(t) \right) dt = \mu \int_0^T \left\| \hat{d}(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt.$$

Logo,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \int_0^T \left\| \hat{d}_{hk}^r(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \left\| \hat{d}(t) \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 dt.$$

Portanto, passando a uma subsequência, se necessário,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left\| \hat{d}_{hk}^r - \hat{d} \right\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 = 0,$$

isto é, a sequência (\hat{d}_{hk}^r) é pré-compacta em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Seja $\tilde{d} \in H^1(0,T;H^{3/2}(\Omega))$ a solução de (2.12). Temos que

$$\left\| \tilde{d} - \tilde{d}_{hk}^r \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 = \sum_{n=1}^{N_0} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t) - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt$$

e

$$\begin{aligned} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t) - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} &\leq \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t) - \tilde{d}(t_n) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} + \\ &\quad + \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t_n) - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t) - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt &\leq 2 \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t) - \tilde{d}(t_n) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t_n) - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \right). \end{aligned}$$

Para o primeiro termo do lado direito da desigualdade temos que

$$\left\| \tilde{d}(t) - \tilde{d}(t_n) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 = \left\| - \int_t^{t_n} \tilde{d}'(s) ds \right\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq k \left\| \tilde{d}' \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2,$$

de onde segue que

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t) - \tilde{d}(t_n) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq k^2 \left\| \tilde{d}' \right\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2,$$

então

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sum_{n=1}^{N_0} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t) - \tilde{d}(t_n) \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt &\leq \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \sum_{n=1}^{N_0} Ck^2 \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} CT_0 k = 0. \end{aligned}$$

Para o segundo termo, lembramos que $\tilde{d}(t_n)$ é solução de

$$-\Delta \tilde{d}(t_n) = 0$$

$$\tilde{d}(t_n) \Big|_{\partial\Omega} = \frac{l(t_n)}{\gamma}$$

e que \tilde{d}_h^n é solução de

$$\begin{aligned} \left(\nabla \tilde{d}_h^n, \nabla g_h \right) &= 0, \quad \forall g_h \in D_{0h} \\ \tilde{d}_h^n|_{\partial\Omega} &= \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Considere \bar{d}_h^n solução de

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{d}_h^n &= 0 \\ \bar{d}_h^n|_{\partial\Omega} &= \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Vamos separar a diferença $\|\tilde{d}(t_n) - \tilde{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)}$ em

$$\|\tilde{d}(t_n) - \tilde{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\tilde{d}(t_n) - \bar{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)} + \|\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)}.$$

A função $\tilde{d}(t_n) - \bar{d}_h^n$ é solução de

$$\begin{aligned} -\Delta(\tilde{d}(t_n) - \bar{d}_h^n) &= 0 \\ (\tilde{d}(t_n) - \bar{d}_h^n)|_{\partial\Omega} &= \frac{l(t_n) - SZ_h l(t_n)}{\gamma}. \end{aligned}$$

Decorre do teorema de traço que

$$\|\tilde{d}(t_n) - \bar{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|l(t_n) - SZ_h l(t_n)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$$

e que

$$\begin{aligned} \|l(t_n) - SZ_h l(t_n)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} &= \|\gamma_0(\tilde{d}(t_n) - SZ_h \tilde{d}(t_n))\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &\leq C \|\tilde{d}(t_n) - SZ_h \tilde{d}(t_n)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C(l)h^{1/2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\tilde{d}(t_n) - \bar{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C(l)h^{1/2}. \quad (3.107)$$

A função $\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n$ satisfaz

$$\begin{aligned} \left(\nabla(\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n), \nabla g_h \right) &= 0, \quad \forall g_h \in D_{0h} \\ (\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n)|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando uma adaptação do lema de *Cea*, demonstrado depois desta proposição, podemos afirmar que

$$\|\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{\substack{g_h \in D_h \\ g_h|_{\partial\Omega} = \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}}} \|\bar{d}_h^n - g_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Em particular, temos que $SZ_h \bar{d}_h^n \in D_h$ e

$$SZ_h \bar{d}_h^n \Big|_{\partial\Omega} = \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}.$$

Logo,

$$\left\| \bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| \bar{d}_h^n - SZ_h \bar{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C(l)h^{1/2}. \quad (3.108)$$

Portanto, de (3.107) e (3.108) temos que

$$\sum_{n=1}^{N_0} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{d}(t_n) - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq \sum_{n=1}^{N_0} k\tilde{C}(l)h = \tilde{C}(l)h,$$

de onde concluímos que (\tilde{d}_{hk}^r) é pré-compacta em $L^2(0, T; H^1(\Omega))$, finalizando a demonstração. ■

Para concluir, é apresentada a adaptação do lema de *Cea*, mencionada na proposição anterior.

Lema 3.7. *Considere \bar{d}_h^n e \tilde{d}_h^n como na proposição anterior, isto é, soluções de*

$$\begin{aligned} \left(\nabla \bar{d}_h^n, \nabla g \right) &= 0, \quad \forall g \in H_0^1(\Omega) \\ \bar{d}_h^n \Big|_{\partial\Omega} &= \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma} \end{aligned}$$

e de

$$\begin{aligned} \left(\nabla \tilde{d}_h^n, \nabla g_h \right) &= 0, \quad \forall g_h \in D_{0h} \\ \tilde{d}_h^n \Big|_{\partial\Omega} &= \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}. \end{aligned}$$

respectivamente. Então

$$\left\| \bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{\substack{v_h \in D_h \\ v_h \Big|_{\partial\Omega} = \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}}} \left\| \bar{d}_h^n - g_h \right\|_{H^1(\Omega)}.$$

Demonstração. Como já foi observado na proposição anterior, a função $\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n$ satisfaz

$$\begin{aligned} \left(\nabla (\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n), \nabla g_h \right) &= 0, \quad \forall g_h \in D_{0h} \\ (\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n) \Big|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

Então, para toda $v_h \in D_h$ tal que $v_h \Big|_{\partial\Omega} = \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}$, temos que

$$\begin{aligned} \left(\nabla (\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n), \nabla (\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n) \right) &= \left(\nabla (\bar{d}_h^n - v_h) + \nabla (v_h - \tilde{d}_h^n), \nabla (\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n) \right) \\ &= \left(\nabla (\bar{d}_h^n - v_h), \nabla (\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n) \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left\| \bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq C \left\| \bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n \right\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C \left\| \bar{d}_h^n - v_h \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| \bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n \right\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Se $\|\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)} = 0$ então o resultado está demonstrado. Caso contrário, basta dividir a desigualdade por $\|\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)}$ e obter

$$\|\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|\bar{d}_h^n - v_h\|_{H^1(\Omega)},$$

para toda $v_h \in D_h$ tal que $v_h|_{\partial\Omega} = \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}$.

Portanto,

$$\|\bar{d}_h^n - \tilde{d}_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq C \inf_{\substack{v_h \in D_h \\ v_h|_{\partial\Omega} = \frac{SZ_h l(t_n)}{\gamma}}} \|\bar{d}_h^n - g_h\|_{H^1(\Omega)},$$

como queríamos. ■

Basta utilizar os resultados de convergência forte para passar ao limite nos termos trilineares. Obtemos assim que as funções limite u , d e w resolvem o problema 3 com funções teste $v \in V$ e o seguinte resultado.

Teorema 3.2. *Toda subfamília da família $\{(u_{hk}^r, d_{hk}^r, w_{hk}^r)\}_{(h,k)}$ tem uma subsequência que converge para uma solução do problema 3 com funções teste $v \in V$ à medida que $(h, k) \rightarrow (0, 0)$.*

Observação 3.12. Pela equivalência dos problemas 3 e 1 temos que toda subfamília da família $\{(u_{hk}^r, d_{hk}^r)\}_{(h,k)}$ tem uma subsequência que converge para uma solução semi-forte de (2.7)-(2.11) à medida que $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. □

Observação 3.13. Se a solução de (2.7)-(2.11) for única então toda subfamília da família $\{(u_{hk}^r, d_{hk}^r)\}_{(h,k)}$ tem uma subsequência que converge para a única solução de (2.7)-(2.11) à medida que $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Isso implica que a família toda converge para a única solução de (2.7)-(2.11) à medida que $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. □

3.5 Análise do Erro

Suponha que u_{hk}^r foi escolhida como aproximação da função u . Temos que

$$\|u - u_{hk}^r\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega))}^2 = \sum_{n=1}^{N_0} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

e

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq 2 \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t) - u(t_n)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t_n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right].$$

O primeiro termo do lado direito da desigualdade pode ser estimado notando-se que

$$u(t) - u(t_n) = - \int_t^{t_n} u'(s) \, ds.$$

É preciso estimar o segundo termo do lado direito da desigualdade.

Sendo assim, nesta seção queremos estimar os erros $\|u(t_n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}$, $\|d(t_n) - d_h^n\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|w(t_n) - w_h^n\|_{L^2(\Omega)}$. Os erros serão separados como segue,

$$\|u(t_n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u(t_n) - I_h u(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|I_h u(t_n) - u_h^n\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.109)$$

$$\|d(t_n) - d_h^n\|_{H^1(\Omega)} \leq \|d(t_n) - SZ_h d(t_n)\|_{H^1(\Omega)} + \|SZ_h d(t_n) - d_h^n\|_{H^1(\Omega)}, \quad (3.110)$$

$$\|w(t_n) - w_h^n\|_{L^2(\Omega)} \leq \|w(t_n) - K_h w(t_n)\|_{L^2(\Omega)} + \|K_h w(t_n) - w_h^n\|_{L^2(\Omega)}, \quad (3.111)$$

O erro de truncamento, isto é, a primeira parcela do lado direito de (3.109) e (3.110) já tem estimativa conhecida, que decorre diretamente da propriedade de aproximação dos operadores I_h , SZ_h e K_h , respectivamente. Resta-nos estimar o erro discreto, isto é, a segunda parcela. Definamos

$$e_u^n = I_h u(t_n) - u_h^n, \quad e_d^n = SZ_h d(t_n) - d_h^n \quad \text{e} \quad e_w^n = K_h w(t_n) - w_h^n. \quad (3.112)$$

A técnica utilizada para estimar os erros discretos (3.112) é parecida com a que foi empregada no final da subseção de análise do erro da seção de definições e resultados preliminares. Utilizamos o sistema contínuo e o sistema discreto para encontrar a equação que é satisfeita por $(u(t_n) - u_h^n, w(t_n) - w_h^n)$ e $(p(t_n) - p_h^n, d(t_n) - d_h^n)$ e, em seguida, somamos e subtraímos alguns termos desta equação a fim de que apareçam os erros discretos e esses possam ser isolados de um lado da equação, restando do outro lado apenas termos para os quais seja possível obter estimativas. Como agora as equações envolvem derivadas no tempo, aparecem, além dos erros de truncamento, os chamados erros de consistência.

Faremos uso das estimativas das propriedades de estabilidade e das seguintes propriedades de aproximação dos operadores SZ_h , I_h e K_h , dadas pelas proposições 3.6, 3.8 e 3.10. Temos que

$$\|d - SZ_h d\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq Ch \|d\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}, \quad m = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall d \in W^{m+1,p}(\Omega), \quad (3.113)$$

$$\|u - I_h u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}, \quad m = 0 \text{ ou } 1, \quad \forall u \in W^{m+1,p}(\Omega), \quad (3.114)$$

$$\|w - K_h w\|_{L^p(\Omega)} \leq Ch \|w\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \forall w \in W^{1,p}(\Omega). \quad (3.115)$$

Usaremos também a estimativa dada pela proposição 3.9

$$\|v - I_h v\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq Ch \|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.116)$$

Integre (3.64) de t_{n-1} a t_n , tome (3.65) no tempo t_n e faça $(v, e) = (v_h, e_h) \in X_h$ e $(p, g) =$

$(p_h, g_h) \in M_h$:

$$\begin{aligned} & k\delta_t \left((u(t_n), \mu d(t_n)), (v_h, e_h) \right) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} a \left((u(t), w(t)), (v_h, e_h) \right) dt + \\ & + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c \left((u(t), d(t)), (u(t), w(t)), (v_h, e_h) \right) dt + \\ & + \int_{t_{n-1}}^{t_n} b(v_h, p(t)) dt + \mu\gamma \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\tilde{f}_\varepsilon(d(t)), e_h \right) dt = 0, \quad \forall (v_h, e_h) \in X_h, \end{aligned} \quad (3.117)$$

$$b(u(t_n), q_h) + \mu((d(t_n), g_h)) - (w(t_n), g_h) = 0, \quad \forall (q, g) \in M_h. \quad (3.118)$$

Subtraia (3.72) de (3.117) e (3.73) de (3.118). Obtemos

$$\begin{aligned} & k\delta_t \left((u(t_n) - u_h^n, \mu(d(t_n) - d_h^n)), (v_h, e_h) \right) + \int_{t_{n-1}}^{t_n} a \left((u(t) - u_h^n, w(t) - w_h^n), (v_h, e_h) \right) dt + \\ & + \int_{t_{n-1}}^{t_n} [c \left((u(t), d(t)), (u(t), w(t)), (v_h, e_h) \right) - c \left((u_h^{n-1}, d_h^{n-1}), (u_h^n, w_h^n), (v_h, e_h) \right)] dt + \\ & + \int_{t_{n-1}}^{t_n} b(v_h, p(t) - p_h^n) dt + \mu\gamma \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\tilde{f}_\varepsilon(d(t)) - \tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}), e_h \right) dt = 0, \quad \forall (v_h, e_h) \in X_h, \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$b(u(t_n) - u_h^n, q_h) + \mu((d(t_n) - d_h^n, g_h)) - (w(t_n) - w_h^n, g_h) = 0, \quad \forall (q_h, g_h) \in M_h. \quad (3.120)$$

Agora, a cada termo de (3.119) e (3.120) somamos e subtraímos os termos convenientes para que apareçam os erros discretos (3.112). Considere o primeiro termo, $k\delta_t \left((u(t_n) - u_h^n, \mu(d(t_n) - d_h^n)), (v_h, e_h) \right)$. Some e subtraia $k\delta_t \left((I_h u(t_n), \mu S Z_h d(t_n)), (v_h, e_h) \right)$,

$$\begin{aligned} k\delta_t \left((u(t_n) - u_h^n, \mu(d(t_n) - d_h^n)), (v_h, e_h) \right) &= k\delta_t \left((u(t_n) - I_h u(t_n), \mu(d(t_n) - S Z_h d(t_n))), (v_h, e_h) \right) + \\ &+ k\delta_t \left((I_h u(t_n) - u_h^n, \mu(S Z_h d(t_n) - d_h^n)), (v_h, e_h) \right) \\ &= k\delta_t \left((u(t_n) - I_h u(t_n), \mu(d(t_n) - S Z_h d(t_n))), (v_h, e_h) \right) + \\ &+ k\delta_t \left((e_u^n, \mu e_h^n), (v_h, e_h) \right). \end{aligned}$$

O erro de consistência deste termo é

$$\mathcal{E}_{h,1}^n(v_h, e_h) = k\delta_t \left((u(t_n) - I_h u(t_n), \mu(d(t_n) - S Z_h d(t_n))), (v_h, e_h) \right).$$

Utilizando o fato de que os operadores de discretização no espaço comutam com a derivada no tempo podemos escrever $\mathcal{E}_{h,1}^n(v_h, e_h)$ como

$$\mathcal{E}_{h,1}^n(v_h, e_h) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left((u'(t) - I_h u'(t), \mu(d'(t) - S Z_h d'(t))), (v_h, e_h) \right) dt. \quad (3.121)$$

Analogamente ao primeiro termo, encontram-se os erros de consistência para os outros termos. Para o segundo termo, some e subtraia $(I_h u(t), K_h w(t))$ e $(I_h u(t_n), K_h w(t_n))$ no primeiro argumento da forma

bilinear a . Obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{h,a}^n(v_h, e_h) &= \mathcal{E}_{h,a,1}^n(v_h, e_h) + \mathcal{E}_{h,a,2}^n(v_h, e_h) \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} a\left((u(t) - I_h u(t), w(t) - K_h w(t)), (v_h, e_h)\right) dt + \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} a\left((I_h(u(t) - u(t_n)), K_h(w(t) - w(t_n))), (v_h, e_h)\right) dt.\end{aligned}\quad (3.122)$$

Para os outros erros de consistência usa-se a mesma ideia. Temos

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{h,b}^n(v_h) &= \mathcal{E}_{h,b,1}^n(v_h) + \mathcal{E}_{h,b,2}^n(v_h) \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} (p(t) - SZ_h p(t), \nabla \cdot v_h) dt + \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} (SZ_h(p(t) - p(t_n)), \nabla \cdot v_h) dt,\end{aligned}\quad (3.123)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{h,f}^n(e_h) &= \mathcal{E}_{h,f,1}^n(e_h) + \mathcal{E}_{h,f,2}^n(e_h) \\ &= \mu\gamma \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\tilde{f}_\varepsilon(d(t)) - \tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t)), e_h) dt + \\ &\quad + \mu\gamma \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t)) - \tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t_{n-1}))), e_h) dt,\end{aligned}\quad (3.124)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{h,c}^n(v_h, e_h) &= \mathcal{E}_{h,c,1}^n(v_h, e_h) + \mathcal{E}_{h,c,2}^n(v_h, e_h) + \mathcal{E}_{h,c,3}^n(v_h, e_h) + \mathcal{E}_{h,c,4}^n(v_h, e_h) \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} c\left((u(t), d(t)), (u(t) - I_h u(t), w(t) - K_h w(t)), (v_h, e_h)\right) dt + \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c\left((u(t), d(t)), (I_h(u(t) - u(t_n)), K_h(w(t) - w(t_n))), (v_h, e_h)\right) dt + \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c\left((u(t) - I_h u(t), d(t) - SZ_h d(t)), (I_h u(t_n), K_h w(t_n)), (v_h, e_h)\right) dt + \\ &\quad + \int_{t_{n-1}}^{t_n} c\left((I_h(u(t) - u(t_{n-1})), SZ_h(d(t) - d(t_{n-1}))), (I_h u(t_n), K_h w(t_n)), (v_h, e_h)\right) dt\end{aligned}\quad (3.125)$$

e, finalmente,

$$\tilde{\mathcal{E}}_h^n(g_h) = \mu (\nabla(d(t_n) - SZ_h d(t_n)), \nabla g_h) - (w(t_n) - K_h w(t_n), g_h). \quad (3.126)$$

Passemos às estimativas dos erros de consistência. Denote por I_n o intervalo (t_{n-1}, t_n) e considere $v_h \in V_h$. Para $\mathcal{E}_{h,1}^n(v_h, e_h)$ temos que

$$\begin{aligned}\left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u'(t) - I_h u'(t), v_h) dt \right| &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} |(u'(t) - I_h u'(t), v_h)| dt \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u'(t) - I_h u'(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \|v_h\|_{H_0^1(\Omega)} dt\end{aligned}$$

e, por (3.116), desigualdade de Hölder e estabilidade de I_h com $m = 0$ e $p = 2$,

$$\left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u'(t) - I_h u'(t), v_h) dt \right| \leq Ch \|u'\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega))} k^{1/2} \|v_h\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Analogamente, utilizando (3.113) e a desigualdade de Hölder obtemos

$$\left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (d'(t) - SZ_h d'(t), e_h) dt \right| \leq Ch \|d'\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))} k^{1/2} \|e_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Concluimos que

$$|\mathcal{E}_{h,1}^n(v_h, e_h)| = Chk^{1/2} \|(u', \mu d')\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega))} \|(v_h, e_h)\|_X. \quad (3.127)$$

Para o termo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,a,1}(v_h, e_h) &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} a((u(t) - I_h u(t), w(t) - K_h w(t)), (v_h, e_h)) dt \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \nu((u(t) - I_h u(t), v_h)) dt + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \gamma(w(t) - K_h w(t), e_h) dt \end{aligned}$$

utilizamos (3.114), com $m = 1$ e $p = 2$, e (3.115), com $p = 2$. Obtemos

$$\|\mathcal{E}_{h,a,1}^n(v_h, e_h)\| \leq Chk^{1/2} \|(\nu u, \gamma w)\|_{L^2(I_n; H^2(\Omega) \times H^1(\Omega))} \|(v_h, e_h)\|_X. \quad (3.128)$$

Considere agora a primeira parcela do segundo termo de $\mathcal{E}_{h,a}^n$, $\mathcal{E}_{h,a,2}^n$. Utilizando a estabilidade de I_h dada pela proposição 3.8,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\nabla I_h(u(t) - u(t_n)), v_h) dt \right| &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla I_h(u(t) - u(t_n))\|_{L^2(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \nabla I_h \int_t^{t_n} u'(s) ds \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| I_h \int_t^{t_n} u'(s) ds \right\|_{H^1(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \int_t^{t_n} u'(s) ds \right\|_{H^1(\Omega)} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} \|u'(s)\|_{H^1(\Omega)} ds \|v_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - t)^{1/2} \|u'\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - t)^{1/2} \|u'\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))} \|v_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{2}{3} C k^{3/2} \|u'\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))} \|v_h\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Absorvendo algumas constantes na constante C e procedendo de maneira similar com a parcela que envolve a função w obtemos a estimativa

$$|\mathcal{E}_{h,a,2}^n(v_h, e_h)| \leq Ck^{3/2} \|(\nu u', \gamma w')\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))} \|(v_h, e_h)\|_X. \quad (3.129)$$

Como estamos considerando $v_h \in V_h$, o segundo termo de $\mathcal{E}_{h,b}(v_h)$ é zero e basta estimarmos o primeiro termo, $\mathcal{E}_{h,b,1}(v_h)$. A estimativa deste termo segue as ideias da estimativa de $\mathcal{E}_{h,a,1}(v_h)$ e obtemos, utilizando as propriedades de aproximação de SZ_h ,

$$|\mathcal{E}_{h,b}(v_h)| \leq Chk^{1/2} \|p\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.130)$$

Tratemos de estimar o erro de consistência $\mathcal{E}_{h,f}(e_h)$. Temos que $|d| \leq 1$ e vimos que, neste caso, $|SZ_h d(t)| \leq C$, logo, podemos verificar que

$$\left| \tilde{f}_\varepsilon(d(t)) - \tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t)) \right| \leq \frac{3}{\varepsilon^2} |d(t) - SZ_h d(t)|,$$

se $|SZ_h d(t)| \leq 1$, ou

$$\begin{aligned} \left| \tilde{f}_\varepsilon(d(t)) - \tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t)) \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon^2} (|SZ_h d(t)| + 1) |d(t) - SZ_h d(t)| \\ &\leq \frac{C+1}{\varepsilon^2} |d(t) - SZ_h d(t)| \end{aligned}$$

se $|SZ_h d(t)| \geq 1$. De qualquer forma,

$$\left| \tilde{f}_\varepsilon(d(t)) - \tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t)) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} |d(t) - SZ_h d(t)|. \quad (3.131)$$

Aplicando (3.113) com $m = 0$ e $p = 2$ e (3.131), para $\mathcal{E}_{h,f,1}(e_h)$ temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\tilde{f}_\varepsilon(d(t)) - \tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t)) \right), e_h \right) dt \right| &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \tilde{f}_\varepsilon(d(t)) - \tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t)) \right\|_{L^2(\Omega)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|d(t) - SZ_h d(t)\|_{L^2(\Omega)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} Ch \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|d(t)\|_{H^1(\Omega)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} dt \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} Chk^{1/2} \|d\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))} \|e_h\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$|\mathcal{E}_{h,f,1}(e_h)| \leq \mu \gamma \frac{C}{\varepsilon^2} h k^{1/2} \|d\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))}. \quad (3.132)$$

Para estimar o termo $\mathcal{E}_{h,f,2}(e_h)$ utilizamos (3.131) e procedemos como na obtenção de (3.129), o que nos dá

$$|\mathcal{E}_{h,f,2}(e_h)| \leq \mu \gamma \frac{C}{\varepsilon^2} k^{3/2} \|d'\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.133)$$

Vamos estimar agora os erros de consistência relacionados à forma trilinear c . O termo $\mathcal{E}_{h,c,1}(v_h, e_h)$ pode ser dividido em dois termos,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{h,c,1}(v_h, e_h) &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \tilde{c}_1(u(t), u(t) - I_h u(t), v_h) dt + \\ &\quad + \mu \int_{t_{n-1}}^{t_n} c_1(u(t) - I_h u(t), d(t), e_h) - c_1(v_h, d(t), w(t) - K_h w(t)) dt. \end{aligned}$$

Para o primeiro termo, temos que, pelo lema 1.3,

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) \cdot \nabla(u(t) - I_h u(t)) , v_h) dt = - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) \cdot \nabla v_h , u(t) - I_h u(t)) dt,$$

porque $u(t) \in V$. Daí, utilizando a desigualdade de Hölder e as imersões de Sobolev (1.11), para dimensão $n = 3$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \tilde{c}_1(u(t), u(t) - I_h u(t), v_h) dt &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t)\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \|u(t) - I_h u(t)\|_{L^3(\Omega)} dt \\ &\leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \|u(t) - I_h u(t)\|_{L^3(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Então, usando (3.114) com $m = 0$ e $p = 3$,

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t)\|_{H^1(\Omega)} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \|u(t) - I_h u(t)\|_{L^3(\Omega)} dt &\leq Ch \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t)\|_{W^{1,3}(\Omega)} dt \\ &\leq Ch k^{1/2} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|u\|_{L^2(I_n; W^{1,3}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Para o segundo termo, também usamos desigualdade de Hölder e imersões de Sobolev para obter

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} ((u(t) - I_h u(t)) \cdot \nabla d(t) , e_h) dt \right| + \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (v_h \cdot \nabla d(t) , w(t) - K_h w(t)) dt \right| &\leq \\ &\leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t) - I_h u(t)\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla d(t)\|_{L^3(\Omega)} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} dt + \\ &+ C \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|v_h\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla d(t)\|_{L^3(\Omega)} \|w(t) - K_h w(t)\|_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Utilizando (3.114) com $m = 0$ e $p = 6$ e (3.115) com $m = 0$ e $p = 2$ obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} ((u(t) - I_h u(t)) \cdot \nabla d(t) , e_h) dt \right| + \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (v_h \cdot \nabla d(t) , w(t) - K_h w(t)) dt \right| &\leq \\ &\leq Ch k^{1/2} \|d\|_{L^\infty(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|(u, w)\|_{L^2(I_n; W^{1,6}(\Omega) \times H^1(\Omega))} \|(v_h, e_h)\|_X. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{h,c,1}(v_h, e_h)| &\leq Ch k^{1/2} \left(\|u\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|u\|_{L^2(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} + \right. \\ &\quad \mu \|d\|_{L^\infty(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|u\|_{L^2(I_n; W^{1,6}(\Omega))} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \left. \mu \|d\|_{L^\infty(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|w\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (3.134)$$

Dividimos $\mathcal{E}_{h,c,2}(v_h, e_h)$ em dois termos, como foi feito com $\mathcal{E}_{h,c,1}(v_h, e_h)$. Usamos novamente o lema 1.3 para escrever

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) \cdot \nabla I_h(u(t) - u(t_n)) , v_h) dt = - \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) \cdot \nabla v_h , I_h(u(t) - u(t_n))) dt$$

e desigualdades de Hölder e imersões de Sobolev para obter

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) \cdot \nabla v_h, I_h(u(t) - u(t_n))) dt \right| &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t)\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \|I_h(u(t) - u(t_n))\|_{L^3(\Omega)} dt \\ &\leq C \|u(t)\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|I_h(u(t) - u(t_n))\|_{L^3(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Em seguida, procedemos como na dedução de (3.129),

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|I_h(u(t) - u(t_n))\|_{L^3(\Omega)} dt &\leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t) - u(t_n)\|_{L^3(\Omega)} dt \\ &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left\| \int_t^{t_n} u'(s) ds \right\|_{L^3(\Omega)} dt \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_t^{t_n} \|u'(s)\|_{L^3(\Omega)} ds dt \\ &\leq \|u'\|_{L^2(I_n; L^3(\Omega))} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_n - t)^{1/2} dt = \frac{2}{3} k^{3/2} \|u'\|_{L^2(I_n; L^3(\Omega))}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (u(t) \cdot \nabla I_h(u(t) - u(t_n)), v_h) dt \right| \leq C k^{3/2} \|u(t)\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|u'\|_{L^2(I_n; L^3(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

Observação 3.14. Observe que, na passagem

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} \|I_h(u(t) - u(t_n))\|_{L^3(\Omega)} dt \leq C \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|u(t) - u(t_n)\|_{L^3(\Omega)} dt,$$

foi utilizada a estabilidade de I_h em $L^p(\Omega)$, para $p = 3$. Caso tivéssemos que recorrer à norma $W^{1,p}(\Omega)$, com $p = 3$, para obter uma limitação, como seria o caso do operador SZ_h , na estimativa apareceria a norma $\|u'\|_{L^2(I_n; W^{1,3}(\Omega))}$ e teríamos que assumir que $u' \in L^2((0, T); W^{1,3}(\Omega))$. Então, a escolha de um operador estável nos espaços $L^p(\Omega)$ nos permitiu exigir menos regularidade da derivada temporal da função u .

□

Para o segundo termo de $\mathcal{E}_{h,c,2}(v_h, e_h)$ utilizamos o mesmo raciocínio empregado para estimar o primeiro termo e obtemos

$$\begin{aligned} &\left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (I_h(u(t) - u(t_n)) \cdot \nabla d(t), e_h) dt \right| + \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (v_h \cdot \nabla d(t), K_h(w(t) - w(t_n))) dt \right| \leq \\ &\leq C k^{3/2} \left(\|d\|_{L^\infty(I_n; W^{1,6}(\Omega))} \|u'\|_{L^2(I_n; L^3(\Omega))} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} + \|d\|_{L^\infty(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|w'\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{h,c,2}(v_h, eh)| &\leq C k^{3/2} \left(\|u\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|u'\|_{L^2(I_n; L^3(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} + \right. \\ &\quad + \mu \|d\|_{L^\infty(I_n; W^{1,6}(\Omega))} \|u'\|_{L^2(I_n; L^3(\Omega))} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \left. + \mu \|d\|_{L^\infty(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|w'\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (3.135)$$

As estimativas de $\mathcal{E}_{h,c,3}(v_h, e_h)$ e $\mathcal{E}_{h,c,4}(v_h, e_h)$ seguem o mesmo raciocínio das estimativa de $\mathcal{E}_{h,c,1}(v_h, e_h)$ e $\mathcal{E}_{h,c,2}(v_h, e_h)$, respectivamente. Verifica-se que

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{h,c,3}(v_h, e_h)| &\leq Chk^{1/2} \left(\|u\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|u\|_{L^2(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} + \right. \\ &\quad \mu \|d\|_{L^2(I_n; W^{2,3}(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \left. \mu \|d\|_{L^2(I_n; W^{2,3}(\Omega))} \|w\|_{L^\infty(I_n; L^2(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (3.136)$$

e que

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{h,c,4}(v_h, e_h)| &\leq Ck^{3/2} \left(\|u\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|u'\|_{L^2(I_n; L^3(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} + \right. \\ &\quad + \mu \|d'\|_{L^2(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|u\|_{L^\infty(I_n; H^1(\Omega))} \|e_h\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \left. + \mu \|d'\|_{L^2(I_n; W^{1,3}(\Omega))} \|w\|_{L^\infty(I_n; L^2(\Omega))} \|v_h\|_{H^1(\Omega)} \right). \end{aligned} \quad (3.137)$$

Resta-nos estimar apenas o erro $\tilde{\mathcal{E}}_h^n(g_h)$. Aplicando (3.113) com $m = 1$ e $p = 2$ e (3.115) com $p = 6/5$ obtemos

$$\left| \tilde{\mathcal{E}}_h^n(g_h) \right| \leq Ch \|g_h\|_{H^1(\Omega)} \left(\mu \|d(t_n)\|_{H^2(\Omega)} + \|w(t_n)\|_{W^{1,6/5}(\Omega)} \right). \quad (3.138)$$

Considere

$$\mathcal{E}_h^n(v_h, e_h) = \mathcal{E}_{h,1}^n(v_h, e_h) + \mathcal{E}_{h,a}^n(v_h, e_h) + \mathcal{E}_{h,b}^n(v_h, e_h) + \mathcal{E}_{h,f}^n(v_h, e_h) + \mathcal{E}_{h,c}^n(v_h, e_h). \quad (3.139)$$

Podemos escrever as equações (3.119) e (3.120) em termos dos erros discretos e_u^n , e_d^n e e_w^n dados por (3.112),

$$\begin{aligned} &k(\delta_t(e_u^n, \mu e_d^n), (v_h, e_h)) + ka((e_u^n, e_w^n), (v_h, e_h)) + \\ &\quad + kc((I_h u(t_{n-1}), SZ_h d(t_{n-1}), (e_u^n, e_d^n), (v_h, e_h)) + \\ &\quad + kc((e_u^{n-1}, e_d^{n-1}), (u_h^n, w_h^n), (v_h, e_h)) = \\ &= \mathcal{E}_h^n(v_h, e_h) - k\mu\gamma \left(\tilde{f}_\varepsilon(d_h^{n-1}) - \tilde{f}_\varepsilon(SZ_h d(t_{n-1})) \right), \\ &\quad \forall (v_h, e_h) \in V_h \times W_h, \end{aligned} \quad (3.140)$$

$$k\mu(\nabla e_d^n, \nabla g_h) - k(e_w^n, g_h) = k\tilde{\mathcal{E}}_h^n(g_h), \quad \forall g_h \in D_{0h}. \quad (3.141)$$

Note que não aparece em (3.140) o termo que envolve o erro da pressão e não aparece em (3.141) o termo que envolve o erro da velocidade. Isso acontece porque tomamos $v_h \in V_h$ e porque $e_u^n \in V_h$, uma vez que $u \in V$, veja a observação 3.6.

Tome $(v_h, e_h) = (e_u^n, e_w^n) \in V_h \times W_h$ em (3.140), $g_h = \mu\delta_t e_d^n \in D_{0h}$ em (3.141), isto é,

$$k\mu^2(\nabla e_d^n, \nabla \delta_t e_d^n) - k(e_w^n, \mu\delta_t e_d^n) - k\tilde{\mathcal{E}}_h^n(\mu\delta_t e_d^n) = 0,$$

e some estas duas equações. Obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ \|e_u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_u^n - e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} + \\
& + \frac{\mu^2}{2} \left\{ |e_d^n|_{H^1(\Omega)}^2 - |e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 + |e_d^n - e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} + \\
& + \nu k |e_u^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \gamma k \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\
& = \mathcal{E}_h^n(e_u^n, e_w^n) - kc \left((e_u^{n-1}, e_d^{n-1}), (I_h u(t_n), K_h w(t_n)), (e_u^n, e_w^n) \right) + \\
& - \mu \gamma k \left(\tilde{f}(d_h^{n-1}) - \tilde{f}(SZ_h d(t_{n-1})) , e_w^n \right) + k \mu \tilde{\mathcal{E}}_h^n(\delta_t e_d^n).
\end{aligned} \tag{3.142}$$

Precisamos limitar os termos do lado direito da equação. O termo $\mathcal{E}_h^n(e_u^n, e_w^n)$ é limitado com base nas limitações (3.127)-(3.137). Para os termos de $\mathcal{E}_h^n(e_u^n, e_w^n)$ que têm estimativas como (3.127), por exemplo, fazemos

$$|\mathcal{E}_{h,1}^n(e_u^n, e_w^n)| = Ch \|(u', \mu d')\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega))} k^{1/2} \|(e_u^n, e_w^n)\|_X$$

e usamos a desigualdade de Young para obter

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}_{h,1}^n(e_u^n, e_w^n)| &= \frac{C}{\delta} h^2 \|(u', \mu d')\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega))}^2 + \frac{\delta}{2} k \|(e_u^n, e_w^n)\|_X^2 \\
&\leq \frac{1}{2} C(\delta) h^2 \|(u', \mu d')\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega) \times H^1(\Omega))}^2 + \frac{\delta}{2} k \|e_u^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} k \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

onde $\delta > 0$. Para os termos de $\mathcal{E}_h^n(e_u^n, e_w^n)$ que têm estimativas como (3.129), por exemplo, fazemos

$$|\mathcal{E}_{h,a,2}^n(e_u^n, e_w^n)| \leq Ck \|(\nu u', \gamma w')\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))} k^{1/2} \|(e_u^n, e_w^n)\|_X$$

e usamos a desigualdade de Young para obter

$$|\mathcal{E}_{h,a,2}^n(e_u^n, e_w^n)| \leq \frac{1}{2} C(\delta) k^2 \|(\nu u', \gamma w')\|_{L^2(I_n; H^1(\Omega) \times L^2(\Omega))}^2 + \frac{\delta}{2} k \|e_u^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} k \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

O termo $kc \left((e_u^{n-1}, e_d^{n-1}), (I_h u(t_n), K_h w(t_n)), (e_u^n, e_w^n) \right)$ pode ser estimado por

$$Ck \|(u(t_n), w(t_n))\|_{(W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times L^3(\Omega)} \|(e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} \|(e_u^n, e_w^n)\|_X,$$

ou, ainda,

$$Ck^{1/2} \|(u(t_n), w(t_n))\|_{(W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times L^3(\Omega)} \|(e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} k^{1/2} \|(e_u^n, e_w^n)\|_X.$$

Utilizando a desigualdade de Young, obtemos

$$\begin{aligned}
& Ck^{1/2} \|(u(t_n), w(t_n))\|_{(W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times L^3(\Omega)} \|(e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} k^{1/2} \|(e_u^n, e_w^n)\|_X \leq \\
& \leq \frac{1}{2} C(\delta) k \|(u(t_n), w(t_n))\|_{(W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \times L^3(\Omega)}^2 \|(e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}^2 + \\
& + \frac{\delta}{2} k \|e_u^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} k \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Analogamente, termo $\mu\gamma k \left(\tilde{f}(d_h^{n-1}) - \tilde{f}(SZ_h d(t_{n-1})) , e_w^n \right)$ pode ser estimado por

$$\begin{aligned} Ck \frac{\mu\gamma}{\varepsilon^2} \|e_d^{n-1}\|_{L^6(\Omega)} \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)} &\leq Ck^{1/2} \frac{\mu\gamma}{\varepsilon^2} \|e_d^{n-1}\|_{H^1(\Omega)} k^{1/2} \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k^{1/2} \frac{C}{\varepsilon^2} \|(e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)} k^{1/2} \|(e_u^n, e_w^n)\|_X \\ &\leq \frac{1}{2} C(\delta, \varepsilon) k \|(e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}^2 + \\ &\quad + \frac{\delta}{2} k \|e_u^n\|_{H^1(\Omega)}^2 + \frac{\delta}{2} k \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Considerando essas estimativas para os três primeiros termos do lado direito de (3.142) obtemos de (3.142)

$$\begin{aligned} &\left\{ \|e_u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|e_u^n - e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} + \\ &+ \mu^2 \left\{ |e_d^n|_{H^1(\Omega)}^2 - |e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 + |e_d^n - e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right\} + \\ &\quad + (\nu - \delta) k |e_u^n|_{H^1(\Omega)}^2 + (\gamma - \delta) k \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq C(I_n, \delta)(h^2 + k^2) + k \|(e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}^2 + \\ &\quad + 2\mu k \tilde{\mathcal{E}}_h^n(\delta_t e_d^n). \end{aligned} \tag{3.143}$$

A constante $C(I_n, \delta)$ tem a ver com as normas das funções u , d , w , suas derivadas temporais e p no intervalo I_n . A ideia é limitar a soma das normas no intervalo I_n pela norma no intervalo $(0, T_0)$, por exemplo,

$$\sum_{n=1}^m \|u'\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega))}^2 \leq \|u'\|_{L^2(0, T_0; L^2(\Omega))}^2.$$

Logo, temos que

$$\sum_{n=1}^m C(I_n, \delta) \leq C(\delta).$$

Escolha $\delta > 0$ tal que $\nu - \delta > \alpha > 0$ e $\gamma - \delta > \alpha > 0$. Somando de $n = 1$ até m obtemos

$$\begin{aligned} &\|e_u^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 |e_d^m|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m \left(\|e_u^n - e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 |e_d^n - e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right) + \\ &\quad + \alpha \sum_{n=1}^m k \left(|e_u^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \\ &\leq C(h^2 + k^2) + \sum_{n=1}^m k \|(e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1})\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}^2 + 2\mu \sum_{n=1}^m k \tilde{\mathcal{E}}_h^n(\delta_t e_d^n). \end{aligned} \tag{3.144}$$

Resta-nos estimar o último termo do lado direito, $\sum_{n=1}^m k \tilde{\mathcal{E}}_h^n(\delta_t e_d^n)$. Podemos reescrever este termo como

$$k \sum_{n=1}^m \tilde{\mathcal{E}}_h^n(\delta_t e_d^n) = -k \sum_{n=2}^m \delta_t \tilde{\mathcal{E}}_h^n(e_d^{n-1}) + \tilde{\mathcal{E}}_h^m(e_d^m)$$

e temos que

$$\delta_t \tilde{\mathcal{E}}_h^n(e_d^{n-1}) = \mu \left(\nabla \delta_t(d(t_n) - SZ_h d(t_n)) , \nabla e_d^{n-1} \right) - \left(\delta_t(w(t_n) - K_h w(t_n)) , e_d^{n-1} \right).$$

Assim,

$$\mu \delta_t \tilde{\mathcal{E}}_h^n(e_d^{n-1}) \leq C \mu h k^{1/2} \left(\mu \|d'\|_{L^2(I_n; H^2(\Omega))} + \|w'\|_{L^2(I_n; W^{1,6/5}(\Omega))} \right) |e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}. \quad (3.145)$$

Utilizando (3.145) e (3.138) obtemos

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=1}^m k \tilde{\mathcal{E}}_h^n(\mu \delta_t e_d^n) &\leq C \mu h k^{1/2} \sum_{n=2}^m \left(\mu \|d'\|_{L^2(I_n; H^2(\Omega))} + \|w'\|_{L^2(I_n; W^{1,6/5}(\Omega))} \right) |e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)} + \\ &\quad + C \mu h \|(\mu d, w)\|_{L^\infty(H^2(\Omega) \times W^{1,6/5}(\Omega))} |e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \delta \mu^2 \sum_{n=1}^m k |e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 + \delta \mu^2 |e_d^m|_{H^1(\Omega)}^2 + \\ &\quad + \frac{C}{\delta} h^2 \left(\|(\mu d', w')\|_{L^2(H^2(\Omega) \times W^{1,6/5}(\Omega))}^2 + \|(\mu d, w)\|_{L^\infty(H^2(\Omega) \times W^{1,6/5}(\Omega))}^2 \right). \end{aligned}$$

Escolhendo $\delta = \frac{1}{2}$ e substituindo essa estimativa em (3.143) obtemos

$$\begin{aligned} \|e_u^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu^2}{2} |e_d^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m \left(\|e_u^n - e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 |e_d^n - e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right) + \\ + \alpha \sum_{n=1}^m k \left(|e_u^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \quad (3.146) \\ \leq C(h^2 + k^2) + C \sum_{n=1}^m k \left\| (e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

A estimativa para o erro segue da aplicação da seguinte versão discreta do lema de Gronwall.

Lema 3.8. *Seja (k_m) uma sequência de números reais não negativos. Considere a sequência (a_m) , com $a_m \geq 0$, e uma constante $c_0 \geq 0$ tais que*

$$a_0 \leq c_0$$

e

$$a_m \leq c_0 + \sum_{j=0}^{m-1} k_j a_j, \quad m \geq 1.$$

Então, para $m \geq 1$ vale

$$a_m \leq c_0 \exp \left(\sum_{j=1}^{m-1} k_j \right).$$

De fato, como todos os termos são não negativos a equação (3.146) implica que

$$\begin{aligned}
& \|e_u^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu^2}{2} |e_d^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^m \left(\|e_u^n - e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 |e_d^n - e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right) + \\
& \quad + \alpha \sum_{n=1}^m k \left(|e_u^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \\
& \leq C(h^2 + k^2) + C \sum_{n=1}^m k \left\| (e_u^{n-1}, \mu e_d^{n-1}) \right\|_{L^2(\Omega) \times H^1(\Omega)}^2 + \\
& + C \sum_{j=0}^{m-1} k \left(\sum_{n=1}^j \left(\|e_u^n - e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 |e_d^n - e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right) \right) + \\
& \quad C \sum_{j=0}^{m-1} k \left(\alpha \sum_{n=1}^j k \left(|e_u^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \right). \tag{3.147}
\end{aligned}$$

Tomando (k_m) como sendo a sequência constante igual a Ck , a_m como sendo toda a parcela do lado esquerdo da desigualdade e $c_0 = C(h^2 + k^2)$, pelo lema 3.8, temos o seguinte resultado, que é o objetivo da seção.

Teorema 3.3. *Se a família de triangulações utilizada é quasi-uniforme e a solução (u, p, d, w) problema 3 tem a regularidade*

$$\begin{aligned}
& (u, d, w) \in L^2(0, T_0; H^2(\Omega) \times W^{2,3}(\Omega) \times H^1(\Omega)), \\
& u \in L^\infty(0, T_0; W^{1,3}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)), \quad p \in L^2(0, T_0; H^1(\Omega)), \\
& (\partial_t u, \partial_t d, \partial_t w) \in L^2(0, T_0; H^1(\Omega) \times H^2(\Omega) \times W^{1,6/5}(\Omega))
\end{aligned}$$

então o esquema totalmente discreto (3.70)-(3.71) satisfaz, para $1 \leq m \leq N_0$,

$$\begin{aligned}
& \|e_u^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu^2}{2} |e_d^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \\
& + \sum_{n=1}^m \left(\|e_u^n - e_u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu^2 |e_d^n - e_d^{n-1}|_{H^1(\Omega)}^2 \right) + \\
& + \alpha \sum_{n=1}^m k \left(|e_u^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|e_w^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq C(h^2 + k^2),
\end{aligned}$$

com a constante $C > 0$ dependendo exponencialmente de $1/\varepsilon^2$, mas independente de h, k e m .

Para completar o resultado vejamos uma demonstração do lema de Gronwall discreto 3.8. Utilizaremos o seguinte lema.

Lema 3.9. *Seja (k_m) uma sequência de números reais não negativos. Temos que*

$$1 + k_0 + \sum_{n=1}^{m-1} \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 + k_j) \right) k_n \leq \prod_{n=0}^{m-1} (1 + k_n)$$

Demonstração. Temos que

$$1 + k_0 + \sum_{n=1}^{m-1} \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 + k_j) \right) k_n = 1 + k_0 + (1 + k_0)k_1 + (1 + k_0)(1 + k_1)k_2 + \cdots + \prod_{j=0}^{m-2} (1 + k_j)k_{m-1}$$

Note que todos os termos do lado direito da igualdade são distintos e também são termos de $\prod_{n=0}^{m-1} (1 + k_n)$, logo, como $k_m \geq 0$, para todo m , obtemos o resultado enunciado. ■

Demonstração do lema 3.8. Primeiramente, mostremos por indução que

$$a_m \leq c_0 \prod_{n=0}^{m-1} (1 + k_n), \quad m \geq 1. \quad (3.148)$$

De fato, temos que $a_0 \leq c_0$, logo,

$$a_1 \leq c_0 + k_0 a_0 \leq c_0(1 + k_0),$$

isto é, (3.148) vale para $m = 1$. Suponha que (3.148) vale para $m \leq l$, para algum $l \geq 1$, então

$$\begin{aligned} a_{l+1} &\leq c_0 \sum_{n=0}^l k_n a_n \leq c_0 + c_0 k_0 + \sum_{n=1}^l c_0 k_n \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 + k_j) \right) = \\ &= c_0 \left(1 + k_0 \sum_{n=1}^l \left(\prod_{j=0}^{n-1} (1 + k_j) \right) k_n \right) \end{aligned}$$

e pelo lema 3.9 temos que

$$a_{l+1} \leq c_0 \prod_{n=0}^l (1 + k_n),$$

como queríamos.

Note agora que para todo $x \geq 0$ temos que

$$1 + x \leq \exp(x).$$

Basta utilizar esta desigualdade em (3.148) para obter o resultado enunciado. ■

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. *Sobolev spaces*. Academic press, 2003. v. 140 of *Pure and Applied Mathematics*.
- [2] BARTLE, G. R. *The elements of integration and Lebesgue measure*. New York: Jhon Wiley & Sons, 1995.
- [3] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. New York: Springer Science & Business Media, 2010.
- [4] BREZZI, F.; FORTIN, M. *Mixed and hybrid finite element methods*. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [5] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev, Vol. I*. Textos do Departamento de Matemática. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2000.
- [6] CIARLET, P. G. *The finite element method for elliptic problems*. Classics in Applied Mathematics. Amsterdam: SIAM, 2002.
- [7] CLIMENT-EZQUERRA, B.; GUILLÉN-GONZÁLEZ, F.; ROJAS-MEDAR, M. Reproductivity for a nematic liquid crystal model. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, v. 57, n. 6, p. 984–998, 2006.
- [8] CLIMENT-EZQUERRA, B.; GUILLÉN-GONZÁLEZ, F. A review of mathematical analysis of nematic and smectic-a liquid crystal models. *European Journal of Applied Mathematics*, v. 25, n. 1, p. 133–153, 2014.
- [9] CODDINGTON, E. A.; LEVINSON, N. *Theory of Ordinary Differential Equations*. New Delhi: Tata McGraw-Hill, 1972.
- [10] DA JUSTA MEDEIROS, L. A.; MILLA M., M. *Espaços de Sobolev: iniciação aos problemas elíticos não homogêneos*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2000.
- [11] DE GENNES, P. G.; PROST, J. *The Physics of Liquid Crystals*. 2. ed., The international series of monographs on physics. Oxford: Oxford University Press, 1993.

- [12] DEMENGEL, F.; DEMENGEL, G. *Functional spaces for the theory of elliptic partial differential equations*. London: Springer, 2012.
- [13] GIRAULT, V.; GUILLÉN-GONZÁLEZ, F. Mixed formulation, approximation and decoupling algorithm for a penalized nematic liquid crystals model. *Mathematics of Computation*, v. 80, n. 274, p. 781–819, 2011.
- [14] GIRAULT, V.; LIONS, J.-L. Two-grid finite-element schemes for the transient Navier-Stokes problem. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, v. 35, n. 5, p. 945–980, 2001.
- [15] GIRAULT, V.; RAVIART, P.-A. *Finite element methods for Navier-Stokes equations - theory and algorithms*. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [16] GRISVARD, P. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Monographs and studies in Mathematics. Boston: Pitman Publishing, 1985.
- [17] GUILLÉN-GONZÁLEZ, F.; RODRÍGUEZ-BELLIDO, M. A.; ROJAS-MEDAR, M. A. Sufficient conditions for regularity and uniqueness of a 3d nematic liquid crystal model. *Mathematische Nachrichten*, v. 282, n. 6, p. 846–867, 2009.
- [18] GUNZBURGER, M. The inf-sup condition in mixed finite element methods with application to the Stokes system. In: ESTEP, D.; TAVENER, S. (Eds.) *Collected lectures on the preservation of stability under discretization*. Philadelphia: SIAM, 2002. p. 93–121.
- [19] HEYWOOD, J. G.; RANNACHER, R. Finite element approximation of the nonstationary Navier–Stokes problem. i. Regularity of solutions and second-order error estimates for spatial discretization. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 19, n. 2, p. 275–311, 1982.
- [20] HOUNIE, J. Teoria elementar das distribuições. *12º Coloquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, 1979.
- [21] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis with applications*. New York: Wiley, 1989.
- [22] LIN, F.-H.; LIU, C. Nonparabolic dissipative systems modeling the flow of liquid crystals. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 48, n. 5, p. 501–537, 1995.
- [23] SCOTT, L. R.; ZHANG, S. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Mathematics of Computation*, v. 54, n. 190, p. 483–493, 1990.
- [24] SIMON, J. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Annali di Matematica pura ed applicata*, v. 146, n. 1, p. 65–96, 1986.

-
- [25] TEMAM, R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*. Amsterdam: North Holland, 1977.
- [26] YOSIDA, K. *Functional Analysis*. 4. ed., Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag, 1974.